Kalibrierung ökonomischer Planungsmodelle mittels Fuzzy-LP

BRUNO TRIES

Institut für Betriebswirttschaft

Soll die Entwicklung eines Betriebes oder eines Aggregates von Betrieben auf der Grundlage seiner bisherigen Entwicklung, aber unter veränderten Preis- oder anderen Rahmenbedingungen projiziert werden, dann benötigt man dazu Daten über die innerbetrieblichen Input/Output-Relationen (Aufwandsmengen, Erträge je ha, Arbeitsbedarf Tierleistung etc.). Diese Daten weisen in der Regel größere Unterschiede von Betrieb zu Betrieb als die von Jahr zu Jahr auf. Sie sollen daher möglichst aus dem betreffenden Betrieb bzw Aggregat stammen. Leider werden viele dieser Daten nicht erhoben und/oder ausgewiesen. Daher sind sie zu schätzen beispielsweise aus Faktorausstattung, Produktionsziffern, monetären Erträgen und Aufwendungen. Ein mit den Ergebnissen solcher Schätzungen bestücktes Modell muß dann in „zwangsfreier" Optimierung beispielweise im Einzelbetrieb eine Buchführung nachvollziehen.

Zur Beseitigung von Modellfehlern wurden mehrere Verfahren unter der Bezeichnung „positive progamming" entwickelt. Als das am meisten bekannte darf das Verfahren von Howitt ((1) siehe auch die dort angegebene Literatur) angesehen werden. Wichtigstes Merkmal dieser Verfahren ist die Nichtlinearisierung des Ausgangs-LP. Dies bedeutet eine Änderung der Modellstruktur. Das Ausgangsmodell ist demnach als Vorstufe des letztlich für die eigentlichen Untersuchungen genutzten Modells anzusehen.

Andere Verfahren, die nicht die Modellstruktur (LP) ändern sondern sich mit der Verbesserung der Matrixkoeffizienten befassen, sind in (2) angeführt. Da dort eine Würdigung und Kritik der Verfahren aufgeführt ist, kann hier eine nochmalige Aufzählung unterbleiben.

Das im folgenden vorgestellte Verfahren ist sehr einfach zu handhaben. Neben der Beibehaltung der Modellstruktur (LP), paßt es alle infrage stehenden Koeffizienten gleichzeitig an. Dies erfolgt durch Änderung der Koeffizienten mit Hilfe der Einführung zusätzlicher „weicher" (fuzzy) Variablen.

Ausgangsmodell ist auch hier ein „freies" LP. D. h., es wird mit den zur Verfügung stehenden Daten ein Analysemodell erstellt und die Lösung mit den tatsächlichen Gegebenheiten verglichen. In der Regel ergeben sich Differenzen. Im nächsten Schritt wird das LP im Hinblick auf die gemessenen (vorgegeben) Ressourcen fixiert und mit Hilfe des Fuzzy-LP angeglichen. Die auf diese Weise zu ändernden Daten erfüllen die vorgegebenen Restriktionen.

Sei

$$\begin{aligned} &\text{Max } c \cdot x \\ &A \cdot x \leq b_1 \\ &B \cdot x \leq b_2 \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

das Ausgangs-LP, das beispielweise zur Analyse eines Regionshofes dient.

Im folgenden bezeichnet „freie Lösung" die Lösung dieses LPs. I. a. wird diese freie Lösung Ergebnisse liefern, die von den gemessenen oder statistischen Daten abweichen - d. h. der Regionshof ist nicht korrekt (ab)gebildet. Soll das Modell weiteren Untersuchungen dienen, dann muß das Modell fixiert werden. Dies erfolgt i.d.R. durch Einführung von Gleichungen. Durch $B \cdot x = b_2$ ändert sich das freie Modell zu:

$$\begin{aligned} &\text{Max } c \cdot x \\ &A \cdot x \leq b_1 \\ &B \cdot x = b_2 \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Wenn dann die Gleichungen zur Erfüllung von b_2 zu starken Abweichungen gegenüber der freien Lösung führen, dann müssen die „Standard"-Koeffizienten angepaßt werden.

Eine Möglichkeit liefert das Fuzzy-LP das man nach Hinzufügen von Hilfsvariablen erhält. Eine Einführung in die Theorie der unscharfen Mengen sprengt den Rahmen dieser Arbeit. Näheres zur Theorie der unscharfen Programmierung mittels Fuzzy-LP findet sich beispielsweise in (3) und der dort angegebenen Literatur. Das Verfahren läßt sich aber auch, wie folgt, anschaulich darstellen.

Sei M das in einer freien Optimierung erhaltene Maximum und t_i und λ Hilfsvariablen, dann hat das (allgemeine) Fuzzy-LP folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} &\lambda \rightarrow \text{Max} \\ &\lambda \cdot pi + t_i \leq p_i \qquad (i=1,2,...,n) \\ &c \cdot x + t_1 = M \\ &A \cdot x \leq b_1 \\ &B \cdot x - t_i = b_2 \qquad (i= 2,3,...,n) \\ &x \geq 0 \\ &t_i \leq pi \\ &t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

wobei die p_i vorzugebenden Bandbreiten darstellen.

Da in diesem Modell t_2,...,tn auch negativ sein dürfen und dadurch die Ausbringung von x „drücken", muß man u. U. zusätzlich in solchen (möglicherweise ungewünschten) Fällen $-t_i \leq p_i$ verlangen.

Tabelle 1: Umwandlung eines Ausgangs-LP's in ein Fuzzy-LP

	Ausgangsmatrix									Fuzzy-Teil				Ausgangs-RHS	Fuzzy-RHS
	GT	ZR	RI	SW	VKG	VKZR	VKFR	VKFS	VKMI	t_1	t_2	t_3	λ		
ZIEL	-900	-800	-1.200	-100	27	10	8	3	0,5					=> Max.	=156.000
AF	1	1												$\leq$ 100	$\leq$ 100
GL			1											$\leq$ 15	$\leq$ 15
AK	0,03	0,02	0,02	0,01										$\leq$ 2	$\leq$ 2
ERGT	-70		2	3	1									$\leq$ 0	$\leq$ 0
ERZR		-400				1								$\leq$ 0	$\leq$ 0
MI			-8000						1					$\leq$ 0	$\leq$ 0
FLR			-200				1							$\leq$ 0	$\leq$ 0
FLS				-100				1						$\leq$ 0	$\leq$ 0
Soll GT	1										1			= 50	= 50
Soll ZR		1										1		=10	= 10
Hilfszeile 1											1		7		$\leq$ 7
Hilfszeile 2												1	4		$\leq$ 4
Fuzzy Max.													1		=> Max.

Die Lösung dieses LPs läßt sich wie folgt interpretieren:

Die Variablen t_i (i=1,...,n) ermöglichen der Variablen x eine Ausbringung, die bei $t_i>0$ die vorgegebenen Beschränkungen im Rahmen der durch pi gegebenen Bandbreiten verletzen. Die p_i sind dabei aufgrund von Sachkenntnis sinnvoll festzulegen. Beispielsweise läßt sich aber auch zur Automatisierung des Verfahrens ein bestimmter Prozentsatz der rechten Seiten b_i ansetzen.

Die Variable λ ($0\leq\lambda\leq1$) bewirkt, daß für alle positiven t_i nur der Bereich p_i-λp_i ausgeschöpft werden kann und dazu im ungünstigsten Fall, möglichst gering (λ=max).

Die Ergebnisse t_2 bis t_n lassen sich zur Veränderung der Koeffizienten der Matrix B heranziehen, t_1 ist ein „Schlupf" für die Zielfunktion. Für das hier vorgestellte Beispiel zur Anpassung der Matrixkoeffizienten wird t_1 auf Null fixiert.

Am einfachsten erkennt man das Verfahren anhand eines Beispiels:

Sei E_{gt} der Ertrag für Getreide, sei b_{gt} eine (aus der Statistik) vorgegebene (regionale) Getreidemenge, sei G_{ha} der fuzzy-modellmäßig ermittelte Anbauumfang für Getreide und sei T<0 die Lösung für t_{gt}. Sei in B•x = b_2 die Zeile für das zu produzierende Getreide dargestellt durch E_{gt}•ha = b_{gt} wobei ha den Anbauumfang im fixierten Modell bezeichnet. Dann hat die Zeile für die Getreideproduktion in der Lösung des Fuzzy-Modells folgende Gestalt:

$$E_{gt} \cdot G_{ha} + |T| = b_{gt}, \text{ oder}$$
$$E_{gt} + |T|/G_{ha} = b_{gt}/G_{ha}.$$

Der zweiten Gleichung ist zu entnehmen, daß eine in dem Ausgangs-LP vorzunehmende Änderung von E_{gt} zu (Egt + $|T|/G_{ha}$) die Gleichung B•x=b_2 im Optimalzustand erfüllt. Selbstverständlich gilt dies nur dann, wenn alle Verbesserungen vorgenommen werden.

Aus dem Beispiel ist auch der Grund für das a priori Nullsetzen von t_1 zu erkennen; es kann sinnvoll nur ein Koeffizient je Zeile geändert werden.

Im folgenden zeigen wir die Verfahrensweise an dem in der **Tabelle 1** dargestellten Beispiel (die Beispielsmatrix erhebt keinen Anspruch auf Realitätsnähe).

Das Procedere erfolgt nach Ermittlung der freien Optimierung in drei Schritten.

Die freie Optimierung, d. h. ohne Gleichungsbeschränkungen SOLL GT und SOLL ZR ergibt eine Lösung für die Zielfunktion von 156000 DM. Der erste Schritt, die Fixierung des Modells, benutzt die Ausgangsmatrix und die Ausgangs-RHS aus der Tabelle. Die Lösung ergibt einen Zielfunktionswert von 146 TDM.

Im zweiten Schritt wird der Fuzzy-Teil an die Ausgangsmatrix angehängt und die RHS durch die Fuzzy-RHS ersetzt.

Die das „SOLL" erfüllende Lösung ergibt folgende Werte:

λ = 0,084 $\quad$ t_2 = -2,444 $\quad$ t_3 = 3,665

Interpretation: Der Wert für λ zeigt, daß mindestens in einem Fall (hier Zuckerrübe) die Bandbreite durch t_i (hier t_3) fast ausgeschöpft ist. Der negative Wert für t_2 zeigt, daß der Ertrag für Weizen zu hoch angenommen ist. Aus den Werten der Fuzzy-Variablen ergibt sich eine notwendige Korrektur der Koeffizienten im Ausgangsmodell.

Nach dem o. a. Verfahren, angewendet auf die Erträge mit „Umweg" über die Anbauflächen ($Ertg_{neu}=Ertg_{alt}/(1-T_i/ha)$ wobei 1 der Koeffizient für den Anbau und ha die Lösung für den Anbau sind), ergibt sich für die kalibrierten Erträge für Getreide der Wert 66,6 (dt/ha) und für Zuckerrüben der Wert 547 (dt/ha). D. h., mit den angegebenen Daten für den Anbau von Getreide und Zuckerrüben muß im Modell statt der angenommenen Erträge mit den errechneten Erträgen gerechnet werden. Die neue Matrix hat dann die in der **Tabelle 2** dargestellte Gestalt.

Die Lösung des Verfahrens zeigt, daß im Ausgangsmodell unter den gegebenen Daten für Kosten, Anbauumfang und Arbeit der Ertrag je ha für Getreide überschätzt und der für Zuckerrüben unterschätzt wurde.

Die im dritten Schritt erfolgte Kontrollrechnung zeigt, daß der Wert der Zielfunktion durch dieses Verfahren auf 156730 angestiegen ist, d. h. die Ausgangslösung leicht überschritten hat. Diese Differenz ist durch die implizit veränderten Kosten je dt-Ertrag verursacht.

Tabelle 2: Geänderte Matrix

	GT	ZR	RI	SW	VKG	VKZR	VKFR	VKFS	VKMI	RHS
ZIEL	-900	-800	-1.200	-100	27	10	8	3	0,5	=> Max.
AF	1	1								≤ 100
GL			1							≤ 15
AK	0,03	0,02	0,02	0,01						≤ 2
ERGT	-66,6		2	3	1					≤ 0
ERZR		-547				1				≤ 0
MI			-8000						1	≤ 0
FLR			-200				1			≤ 0
FLS				-100				1		≤ 0
Soll GT	1									≤ 50
Soll ZR		1								≤ 10

Da, wie oben erwähnt, nur jeweils ein Koeffizient je Zeile sinnvoll geändert werden kann, ist eine Kostenangleichung für jede infrage kommende Aktivität nur über die Einführung je einer „Kostentransferzeile" möglich.

Das folgende Beispiel zeigt (Auschnitt für ZR) eine Möglichkeit dazu:

	ZR	Kosten	t_k	
ZIEL	0	-1		
Transfer	800	-1	1	= 0

Sei T die Lösung für t_k, K die für Kosten und ha die für ZR. Dann läßt sich die Transferzeile schreiben:

$800 \cdot ha - 1 \cdot K - 1 \cdot T = 0$; oder, nach Ermittlung von T und ha,

$(800 - T/ha) \cdot ha - K = 0$

Daraus folgt, daß die Kosten je ha von 800 DM verändert werden zu (800 - T/ha) DM.

Zusammenfassung

Modelle mit Standard- und Durchschnittsdaten bzw. -Koeffizienten geben a priori nur selten eine konsistente Beschreibung der tatsächlichen Gegebenheiten. Daraus erwächst das Problem der Anpassung der Modellstruktur und/oder der Koeffizienten. In manchen Fällen genügt eine Fixierung der gemessenen Struktur; dies ist aber dann unzulässig, wenn die Modelle als Hilfmittel zur Simulation oder Prognose dienen sollen. Die Modelle müssen angepaßt werden um in Optimierungsrechnungen ein konsistentes Bild zu erzeugen. Die notwendigen Anpassungen erfordern meist viel Aufwand, beispielweise die Bildung von sogenannten positiven Modellen. Sehr oft genügt eine Anpassung der Koeffizienten.

Mit Hilfe der Technik der unscharfen Programmierung wird gezeigt, wie eine gleichzeitig für alle relevanten Koeffizienten vorgenommene Verbesserung erfolgen kann.

Das mit Hilfe der neuen Koeffizienten angepaßte Modell liefert eine Lösung, die zu der gemessenen Ausgangsstruktur konsistent ist.

Modelcalibration by Fuzzy-LP

Building models via LP one generally fails getting coefficients to have a good picture of the situation to be described. Besides the existing tools sometimes called Positive Programming we give a procedure to calibrate the coefficients. Using Fuzzy-LP it is possible to change the (standard) coefficients such that the new model describes the given situation better than the old one.

Literatur

(1) H o w i t t, R. E.: Positive Mathematical Programming. - Amer. J. Agr. Econ. 77 (1995).

(2) J a c o b s, A.: Paralleler Einsatz von Regionen- und Betriebsgruppenmodellen in der Agrarsektoranalyse. - Dissertation 1998.

(3) T r i e s, B.: Unscharfe Vorgaben zur Bearbeitung von Standortmodellen. - Landbauforschung Völkenrode (38), 1988.

Verfasser: T r i e s, Bruno, Dr. oec., Institut für Betriebswirtschaft der Bundesforschungsanstalt für Landwirtschaft Braunschweig-Völkenrode (FAL), Leiter: Prof. Dr. Folkhard I s e r m e y e r.