Berichte

aus der Biologischen Bundesanstalt für Land- und Forstwirtschaft

Reports

from the Federal Biological Research Centre for Agriculture and Forestry

Heft 31

1997

Einführung in die Biometrie unter Berücksichtigung der Software SAS Teil 2: Vergleich von mehr als zwei Mittelwerten, ein- und zweifaktorielle Varianzanalyse mit festen und zufälligen Effekten

Introduction to the Biometry in Regard to the Software SAS
Part 2: Comparisons of More Than Two Means, Simple and Two-factor Analysis of Variance with Fixed and Random Effects

Eckard Moll

Zentrale EDV-Gruppe, Außenstelle Kleinmachnow

Central Working Group Data Processing, Branch Office Kleinmachnow

BBA

Herausgeber

Biologische Bundesanstalt für Land- und Forstwirtschaft,
Braunschweig, Deutschland

Verlag:
Eigenverlag

Vertrieb:
Saphir-Verlag, Gutsstraße 15, D-38551 Ribbesbüttel
Telefon +49/(0) 53 74-65 76
Telefax +49/(0) 53 74-65 77

ISSN: 0947-8809

Kontaktadresse:
Dr. Eckard Moll
Biologische Bundesanstalt für Land- und Forstwirtschaft
Zentrale EDV-Gruppe, Außenstelle Kleinmachnow
Stahnsdorfer Damm 81
D-14532 Kleinmachnow

Telefon +49/(0) 3 32 03 48-331
Telefax +49/(0) 3 32 03 48-424
E-mail E.Moll@BBA.de

Vorwort

Beginnend mit dem Heft 23 der „Berichte aus der Biologischen Bundesanstalt für Land- und Forstwirtschaft" erscheint in loser Folge eine Sammlung biometrischer Verfahren und Methoden, die es gestattet, sich selbständig biometrisches Grundwissen anzueignen. Darüber hinaus sind diese Hefte Begleitmaterial für Kurse zur Thematik „Einführung in die Biometrie unter Berücksichtigung der Software SAS".
Der Teil 1 beschäftigt sich mit der Erläuterung grundlegender Begriffe, der elementaren Datenaufbereitung und parameterfreien und parametrischen Testverfahren zum Vergleich von bis zu zwei Mittelwerten.
Der vorliegende zweite Teil widmet sich dem statistischen Vergleich von mehr als zwei Mittelwerten, der ein- und zweifaktoriellen Varianzanalyse mit festen und zufälligen Effekten.

Dem selbständigen Erarbeiten biometrischen Grundwissens Rechnung tragend, werden die Verfahren anhand konkreter Beispiele nachvollziehbar vorgestellt und Aufgaben zur selbständigen Überprüfung des Wissens formuliert. Die Lösungen der gestellten Aufgaben werden ausführlich dargelegt. Die Basis-Software ist SAS. Für einige Verfahren wird auch Microsoft Excel herangezogen.

Die fachliche Durchsicht des Manuskriptes besorgte wieder Herrn Dr. Tuchscherer aus dem Forschungsinstitut für die Biologie landwirtschaftlicher Nutztiere in Dummerstorf. Dafür soll ihm herzlich gedankt werden. Bedanken möchte ich mich auch bei Frau W. Polichronow für die Gestaltung einiger Tabellen, Durchführung von Beispielsrechnungen und das Korrekturlesen.

Inhaltsverzeichnis

8 Vergleich von mehr als zwei Mittelwerten

8.1 Parameterfreie Verfahren

Jedem Test liegen Modellannahmen, das sind theoretische Voraussetzungen, zugrunde. Für bestimmte Anwendungen mag es genügen, eine annähernd symmetrische Verteilung zu fordern. Eine Reihe von Tests setzt die Normalverteiltheit der *Residuen* voraus. Solche Tests zählen zu den parametrischen Verfahren. Zählt die Normalverteilung nicht zu den Voraussetzungen des Tests, spricht man häufig von einem nichtparametrischen oder parameterfreien Verfahren. Das ist eine verbreitetet, aber nicht korrekte Unterteilung, da auch andere gebräuchliche theoretische Verteilungen außer der Normalverteilung Parameter haben (s. 3.8.2, Teil 1). Nichtparametrische Tests sind in der Regel manuell einfach und schnell zu handhaben. Sie sind allerdings nicht so effizient wie ein parametrischer Test.

Als parameterfreie Tests für den Vergleich von bis zu zwei Mittelwerten werden im Teil 1 aufgeführt:

(Vor-)Zeichentest	Vergleich eines Mittelwertes mit einer Konstanten Vergleich zweier Mittelwerte gepaarter Stichproben
Vorzeichen-Rangsummentest	Vergleich eines Mittelwertes mit einer Konstanten Vergleich zweier Mittelwerte gepaarter Stichproben
U-Test von Mann-Withney bzw. Wilcoxon-Test	Vergleich zweier Mittelwerte unabhängiger Stichproben

8.1.1 H- oder Kruskal-Wallis-Test

Die Mittelwerte aus k (k > 2) unabhängigen Stichproben werden mit dem H- oder Kruskal-Wallis-Test verglichen. Er ist eine Verallgemeinerung des Wilcoxon-Testes und basiert ebenfalls auf Rangzahlen.

Die Nullhypothese lautet

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$.

Sie wird gegen die Alternativhypothese

H_A: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_k$

getestet. Allerdings werden als Mittelwerte nicht die arithmetischen Mittelwerte verglichen. Der Kruskal-Wallis-Test legt als Mittelwert den Median zugrunde.

Beispiel 8.1:

Drei Applikationsverfahren (Spritzen, Sprühen, Feinsprühen) sollen bei der Ausbringung eines Herbizides in ihrer mittleren Wirkung auf die Unkräuter von Getreideparzellen verglichen werden. Das Prüfmerkmal ist die Frischmasse der Unkräuter in g. Vorgegeben wird eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$.[1]

Spritzen	Sprühen	Feinsprühen
8,0	14,8	18,2
11,4	10,4	18,7
8,6	12,0	14,0
15,0	16,9	14,9
16,9	14,3	15,0
11,9	13,4	15,8
10,6	14,9	15,7
12,4	10,8	12,4

[1] POLICHRONOW, W.: Die Anwendung von verteilungsunabhängigen Auswertungsverfahren auf Pflanzenschutzversuche, Ingenieurarbeit, Halle, 1971, S. 24

Papier und Bleistift

Am besten ist immer, sich die Daten zu veranschaulichen. Sie sind in Abb. 8.1 und 8.2 dargestellt.

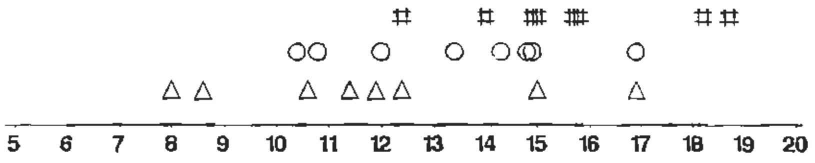


Abb. 8.1: Lage der Daten von Beispiel 8.1
Δ : Spritzen
O : Sprühen
: Feinsprühen

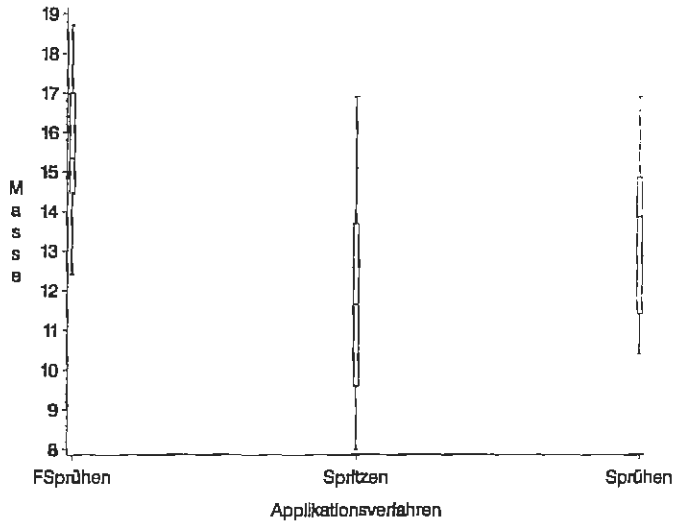


Abb. 8.2: Box-Plots der Daten des Beispiels 8.1

```
data bsp81;
  input v1-v3;
  appl='Spritzen'; masse=v1; output;
  appl='Sprühen '; masse=v2; output;
  appl='FSprühen'; masse=v3; output;
cards;
 8.0      14.8      18.2
11.4      10.4      18.7
 8.6      12.0      14.0
15.0      16.9      14.9
16.9      14.3      15.0
11.9      13.4      15.8
10.6      14.9      15.7
12.4      10.8      12.4
;
goptions htext=1.6 ftext=swiss;
symbol c=black i=boxt;
proc gplot;
  label masse='Masse'
      appl='Applikationsverfahren';
  plot masse*appl;
run; quit;
```

In der Abb. 8.2 sind die Whiskers-Box-Plots dargestellt. Die Box umfaßt den Bereich vom 1. bis zum 3. Quartil (75% - 25% = 50%). Innerhalb der Box ist der Median markiert. Außerhalb der Box ist nach beiden Seiten das 1,5-fache der Quartilsdifferenz (maximal aber Minimum bzw. Maximum) abgetragen. Beide Abbildungen zeigen, daß die Variationsbreite beim Feinsprühen am geringsten und beim Spritzen am größten, fast doppelt so groß wie beim Feinsprühen, ist. Für die mittlere Wirkung der drei Applikationsverfahren auf die Unkrautfrischmasse kann ein Unterschied zwischen dem Spritzen und Feinsprühen vermutet werden. Der H- oder Kruskal-Wallis-Test vergleicht aber nicht paarweise die mittlere Wirkung der Applikationsverfahren, sondern versuchsbezogen die mittlere Wirkung aller Applikationsverfahren. Die Ränge werden unabhängig von der Stichprobenzugehörigkeit der Werte ermittelt, summiert, quadriert und durch die jeweilige Anzahl der Stichprobenelemente der k = 3 Stichproben dividiert:

	Spritzen	Rang	Sprühen	Rang	Feinsprühen	Rang
	8,0	1	14,8	14	18,2	23
	11,4	6	10,4	3	18,7	24
	8,6	2	12,0	8	14,0	12
	15,0	17,5	16,9	21,5	14,9	15,5
	16,9	21,5	14,3	13	15,0	17,5
	11,9	7	13,4	11	15,8	20
	10,6	4	14,9	15,5	15,7	19
	12,4	9,5	10,8	5	12,4	9,5
Summe: R_j		68,5		91,0		140,5
Quadrat: R_j^2		4692,25		8281,00		19740,25
n_j		8		8		8
R_j^2/n_j		586,53125		1035,25		2467,53125

$N = \sum_{j=1}^{k} n_j$, mit k : Anzahl der bezüglich des Prüfmerkmals in ihrer mittleren Wirkung zu vergleichenden Stichproben.

Die Testgröße für den H-Test lautet:

$$H = \frac{12}{N*(N+1)} * \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3*(N+1) \quad .$$

Sie ist approximativ χ^2-verteilt und wird deshalb mit dem (1-α)-Quantil der χ^2-Verteilung bei k-1 Freiheitsgraden verglichen.

Für das Beispiel 8.1 ist die Testgröße H:

$k = 3$

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i = 8 + 8 + 8 = 24$$

$$H = \frac{12}{24 * 25} * (536{,}28125 + 1035{,}25 + 2467{,}53125) - 3 * 25 = 6{,}78625$$

Der $\chi^2_{0,95;\,2}$-Wert wird in der Tab. 8.1 mit 5,991 abgelesen.

Da H = 6,784 > $\chi^2_{0,95;\,2}$ = 5,991 muß die Nullhypothese - die Wirkung der drei Applikationsverfahren ist hinsichtlich des Prüfmerkmals Frischmasse von Unkräutern der Parzelle gleich - abgelehnt werden. Bei der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ kann ein statistischer Unterschied in der mittleren Wirkung der drei Verfahren verzeichnet werden.

Ein Blick auf die Grafik (Abb. 8.1) läßt diesen Unterschied zwischen den Applikationsverfahren Spritzen und Feinsprühen vermuten.

Aufgabe 8.1: Vergleichen Sie mit Hilfe eines parameterfreien Verfahrens die mittlere Wirkung der beiden Applikationsverfahren Spritzen und Feinsprühen hinsichtlich des Prüfmerkmals Unkraut-Frischmasse miteinander (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$).

Einem Problem muß sich allerdings noch zugewandt werden. Beim Bilden der Ränge über alle Stichprobenwerte hinweg treten Bindungen [ties] auf (s. o.). Im Beispiel 8.1 sind das

Wert	Häufigkeit	Rang
12,4	2	9,5
14,9	2	15,5
15,0	2	17,5
16,9	2	21,5

Bei mehreren Bindungen, Wiegand[2] nennt 25% gleicher Werte als Grenze für eine notwendige Korrektur, muß die Testgröße H modifiziert werden[3]:

$$H_{korr} = \frac{H}{1 - \frac{\sum_i t_i(t_i^2-1)}{N\,(N^2-1)}} \quad ,$$

wobei die t_i-Werte die einzelnen Bindungen sind. Im Beispiel 8.1 sind sie 4-mal $t_i = 2$ (s. o.):

$$H_{korr} = \frac{6{,}78625}{1 - \frac{2*3 + 2*3 + 2*3 + 2*3}{24\,(24^2-1)}} = 6{,}798 \quad ,$$

Die oben getroffene Testaussage bleibt auch mit H_{korr} dieselbe.

---

2 WIEGAND, H.: Einige ausgewählte biometrische Methoden für den Praktiker. Teil 2 Ernährungsforschung **18**(1973)3, 125-193

Tabelle 8.1: Quantile der χ^2-Verteilung. Kritische Werte $\chi^2_{1-\alpha;\,FG}$[3]

Freiheitsgrade FG	Irrtumswahrscheinlichkeit α								
	0.25	0.125	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	1.323	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828	12.116
2	2.773	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816	15.202
3	4.108	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266	17.730
4	5.385	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467	19.997
5	6.626	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515	22.105
6	7.841	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458	24.103
7	9.037	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322	26.018
8	10.219	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124	27.868
9	11.389	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877	29.666
10	12.549	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588	31.420
11	13.701	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264	33.137
12	14.845	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909	34.821
13	15.984	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528	36.478
14	17.117	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123	38.109
15	18.245	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697	39.719
16	19.369	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252	41.308
17	20.489	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790	42.879
18	21.605	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312	44.434
19	22.718	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820	45.973
20	23.828	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315	47.498
21	24.935	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797	49.011
22	26.039	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268	50.511
23	27.141	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728	52.000
24	28.241	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179	53.479
25	29.339	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620	54.947
26	30.435	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052	56.407
27	31.528	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476	57.858
28	32.620	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892	59.300
29	33.711	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301	60.735
30	34.800	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703	62.162
40	45.616	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402	76.095
50	56.334	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661	89.561
60	66.981	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607	102.695
80	88.130	94.709	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839	128.261
100	109.141	116.433	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449	153.167
150	161.291	170.098	172.581	179.581	185.800	193.208	198.360	209.265	213.613
200	213.102	223.186	226.021	233.994	241.058	249.445	255.264	267.541	272.423
∞	32170.3	32291.2	32324.6	32417.3	32497.7	32591.5	32655.4	32787.5	32839.0

[3] unter Verwendung des SAS-Programms:

```
options nocenter nodate nonumber ps=1000 ls=150; title;
proc iml;
  f = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,
       21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,40,50,60,80,100,150,200,32000};
  a = {0.25 0.125 0.1 0.05 0.025 0.01 0.005 0.001 0.0005};
  c = j(38,9,1);
  do i=1 to 38;
    do j=1 to 9;
      c[i,j]=cinv(1-a[j],f[i]);
    end;
  end;
  alpha=char(a);
  fg   =char(f);
  print c [format=7.3 rowname=fg colname=alpha];
quit;
```

SAS

```
data bsp81;
  input v1-v3 @@;
  appl = 'Spritzen';  masse= v1;  output;
  appl = 'Sprühen ';  masse= v2;  output;
  appl = 'FSprühen';  masse= v3;  output;
cards;
 8.0 14.8 18.2  11.4 10.4 18.7   8.6 12.0 14.0  15.0 16.9 14.9
16.9 14.3 15.0  11.9 13.4 15.8  10.6 14.9 15.7  12.4 10.8 12.4
;
proc npar1way wilcoxon;     Option WILCOXON: für mehr als 2 Stichproben den Kruskal-Wallis-Test (H-Test)
  class appl;                             die Klassifikationsvariable ist APPL
  var masse ;                             die auszuwertende Variable ist MASSE
run;
```

SAS-Output

```
N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E

Wilcoxon Scores (Rank Sums) for Variable MASSE
Classified by Variable APPL

                        Sum of      Expected      Std Dev         Mean
   APPL        N        Scores      Under H0      Under H0        Score

   Spritzen    8     68.500000        100.0    16.3157255     8.5625000
   Sprühen     8     91.000000        100.0    16.3157255    11.3750000
   FSprühen    8    140.500000        100.0    16.3157255    17.5625000
Average Scores Were Used for Ties

Kruskal-Wallis Test (Chi-Square Approximation)
CHISQ =   6.7956         DF =  2          Prob > CHISQ = 0.0334
```

Die SAS-Ausgabe liefert die Rangsummen, den mittleren Rang jeder Stichprobe und natürlich den χ^2-Wert, die Freiheitsgrade und die Überschreitungswahrscheinlichkeit (`Prob`). Letztere ist kleiner als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit. Die Nullhypothese ist folglich abzulehnen.
Die geringen Abweichungen des χ^2-Wertes im Vergleich zur Handrechnung haben ihre Ursache in der durch SAS vorgenommenenen Zuweisung von Scores zu den Rangzahlen. Erkennbar ist, daß die Bindungen berücksichtigt werden.

<u>Aufgabe 8.2:</u> „Das Peronäus-Nerv-Muskel-Präparat von 6 Katzen, 5 Rhesusaffen und 9 Meerschweinchen wird im Gebiete des Nerven unter Anoxämie gesetzt. Gemessen wird die Zeit, während welcher der Nerv für elektrische Reize leitfähig bleibt.“ Mit einem parameterfreien Verfahren soll bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ getestet werden, ob „Unterschiede in der anoxämischen Empfindlichkeit der peripheren Nerven zwischen den Tierarten bestehen.“[4]

Leitfähigkeit in Minuten

Katze	Affe	Meerschweinchen
17	12	13
26	12	16
33	15	19
40	20	20
45	28	20
55		23
		25
		30
		37

[4] Aufgabenstellung und Daten aus:
LIENERT, G. A.: Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik
Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, Band I, 1973, S. 265 f

8.1.2 Friedman-Test

Bei a Stichproben (z. B. Behandlungen), deren Elemente gleichzeitig n verschiedenen Blocks[5] (Gruppen) zugeordnet sind, gibt es folgende kreuzklassifizierte Anordnung der Werte:

	Stichproben					
Block	Beh 1	Beh 2	...	Beh i	...	Beh a
1	y_{11}	y_{12}		y_{1i}		y_{1a}
2	y_{21}	y_{22}		y_{2i}		y_{2a}
...	...			...		...
i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ii}	...	y_{ia}
...	...			...		...
n	y_{n1}	y_{n2}		y_{ni}		y_{na}

Jeder Block enthält (zufällig ausgewählt) jeweils ein Element jeder Stichprobe. Dieser Versuchsplan entspricht dem Varianzanalysemodell der einfaktoriellen Blockanlage bzw. zweifaktoriellen Blockanlage ohne Wiederholung. Die Blocks können als randomisierter Faktor angesehen werden. Es ist die Hypothese zu testen, ob es in der mittleren Wirkung der a Behandlungen Unterschiede gibt. Es wird die Homogenität geprüft, ob es Unterschiede gibt und nicht, wo sie sind. Als parameterfreier Test steht dafür der Friedman-Test oder Friedman-Kendall-Test zur Verfügung.

Die approximativ χ^2-verteilte Testgröße lautet:

$$F_{Beh} = \frac{12}{n\,a(a+1)} \sum_{j=1}^{a} R_{Beh}^2 - 3n(a+1)$$

Überschreitet der Wert dieser Testgröße das α-Quantil der χ^2-Verteilung, liegt Signifikanz vor, d. h. zwischen den Stichproben bestehen hinsichtlich ihrer mittleren Wirkung Unterschiede.

Beispiel 8.2:

„In einem Betrieb der Schwerindustrie wurde bei Männern im Alter von 18 bis 50 Jahren die Dauer der Arbeitsunfähigkeit bei Erkältungskrankheiten festgestellt. Die Männer arbeiteten unter fünf verschiedenen Bedingungen:

A. Arbeit in geschützten Räumen,
B. Arbeit im Freien
C. Arbeit unter Einwirkung von Staub und Gas,
D. Arbeit unter ungünstigen klimatischen Bedingungen,
E. Arbeit unter C und D zusammen. “[6]

Innerhalb von sechs Monaten wurde die Dauer der Arbeitsunfähigkeit in Tagen festgehalten:

	Arbeitsbedingungen				
Alter	A	B	C	D	E
18 ... 20	5	4	4	10	12
21 ... 25	5	4	4	8	15
26 ... 30	10	7	5	10	15
31 ... 35	25	8	9	10	18
36 ... 40	22	8	10	15	21
41 ... 45	27	10	10	23	26
46 ... 50	30	9	12	28	32

[5] die Blocks sind in der Regel allgemeiner als die Blocks, die man im Feldversuchswesens kennt

[6] aus: WEBER, E.: Grundriß der biologischen Statistik, VEB Gustav Fischer Verlag, Jena, 1986, S. 345 f

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ soll die Nullhypothese getestet werden, daß hinsichtlich der mittleren Arbeitsunfähigkeit zwischen den verschiedenen Arbeitsbedingungen keine signifikanten Unterschiede bestehen.

Die Rangzahlen werden nun je Block vergeben und für jede „Behandlung" (Arbeitsbedingung) summiert:

	Arbeitsbedingungen				
Alter	A	B	C	D	E
18 ... 20	3	1,5	1,5	4	5
21 ... 25	3	1,5	1,5	4	5
26 ... 30	3,5	2	1	3,5	5
31 ... 35	5	1	2	3	4
36 ... 40	5	1	2	3	4
41 ... 45	5	1,5	1,5	3	4
46 ... 50	4	1	2	3	5
	28,5	9,5	11,5	23,5	32

Mit a = 5 Arbeitsbedingungen und n = 7 Altersgruppen (Blocks) ist der Wert der Testgröße

$$F_{Beh} = \frac{12}{n\,a(a+1)} \sum_{j=1}^{a} R_{Beh}^2 - 3n(a+1) = \frac{12}{7*5*6}\left[28{,}5^2 + 9{,}5^2 + 11{,}5^2 + 23{,}5^2 + 32^2\right] - 3*7*6 \quad = 23{,}2 \quad .$$

Für FG = a - 1 = 4 ist $\chi^2_{0{,}95;\,4} = 9.488$ (s. Tabelle 8.1). Folglich muß die Nullhypothese abgelehnt werden. Die Dauer der Arbeitsunfähigkeit hängt also im Mittel von den Arbeitsbedingungen ab.

Nun kann aber auch die Frage interessieren, ob hinsichtlich der Dauer der Arbeitsunfähigkeit signifikante Unterschiede zwischen den Altersgruppe bestehen. Das heißt, daß nun eine Testgröße für die Blocks benötigt wird:

$$F_{Bl} = \frac{12}{a\,n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} R_{Bl}^2 - 3a(n+1) \quad .$$

Die Rangzahlen werden je „Behandlung" (Arbeitsbedingung) ermittelt und für die einzelnen Blocks summiert:

	Arbeitsbedingungen					Summe
Alter	A	B	C	D	E	
18 ... 20	1,5	1,5	1,5	3	1	8,5
21 ... 25	1,5	1,5	1,5	1	2,5	8
26 ... 30	3	3	3	3	2,5	14,5
31 ... 35	5	4,5	4	3	4	20,5
36 ... 40	4	4,5	5,5	5	5	24
41 ... 45	6	7	5,5	6	6	30,5
46 ... 50	7	6	7	7	7	34

Somit ergibt sich:

$$F_{Bl} = \frac{12}{a\,n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} R_{Bl}^2 - 3a(n+1) = \frac{12}{5*7*8}\left[8{,}5^2 + 8^2 + 14{,}5^2 + 20{,}5^2 + 24^2 + 30{,}5^2 + 34^2\right] - 3*5*8$$
$$= 26{,}96$$

Die Freiheitsgrade sind FG = n - 1 = 6 .
Da $F_{Bl} = 26{,}96 > \chi^2_{0{,}95;\,6} = 12.592$ (s. Tabelle 8.1) gibt es auch zwischen den Altersgruppen hinsichtlich der mittleren Dauer der Arbeitsunfähigkeit signifikante Unterschiede.

Der Friedman-Test hängt stark vom Verhältnis der Anzahl der „Behandlungen" a und der Anzahl Blocks n ab. Aber auch das Problem der Bindungen wird am obigen Beispiel wieder sichtbar.

Bei (mehreren) Bindungen sollten die Teststatistiken korrigiert werden:

$$F_{Beh}^{korr} = \frac{F_{Beh}}{1 - \frac{1}{na(a-1)(a+1)} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^3 \right) - a \right]}$$

$$F_{Bl}^{korr} = \frac{F_{Bl}}{1 - \frac{1}{an(n-1)(n+1)} \sum_{j=1}^{a} \left[\left(\sum_{i=1}^{r_j} t_{ij}^3 \right) - n \right]}$$

Beim Vergleich der Arbeitsbedingungen liegen folgende Bindungen vor:

Rang	Häufigkeit
1,5	2
1,5	2
3,5	2
1,5	2

so daß sich die Testgröße verändert

$$F_{Beh}^{korr} = \frac{F_{Beh}}{1 - \frac{1}{na(a-1)(a+1)} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^3 \right) - a \right]} = \frac{23{,}2}{1 - \frac{1}{7*5*4*6} \left\{ (2^3-5) + (2^3-5) + (2^3-5) + (2^3-5) \right\}} = 23{,}54$$

Die Bindungen für den Vergleich der Altersgruppen (Blocks) gibt es die Bindungen

	A	B	C	D	E
Rang	1,5	1,5	1,5	3	2,5
Häufigkeit	2	2	2	3	2
Rang		4,5	5,5		
Häufigkeit		2	2		

Die korrigierte Testgröße ist

$$F_{Bl}^{korr} = \frac{F_{Bl}}{1 - \frac{1}{an(n-1)(n+1)} \sum_{j=1}^{a} \left[\left(\sum_{i=1}^{r_j} t_{ij}^3 \right) - n \right]}$$

$$= \frac{23{,}54}{1 - \frac{1}{5*7*6*8} \left\{ (2^3-7) + (2^3+2^3-7) + (2^3+2^3-7) + (3^3-7) + (2^3-7) \right\}} = 25{,}53$$

Für dieses Beispiel haben die Korrekturen auf die oben vorgenommenen Interpretationen keinen Einfluß.

Bei Rangordnungen unter 6 ist vom Vergleich der Testgröße mit dem α-Quantil der χ^2-Verteilung abzuraten. Eine F-verteilte Testgröße sollten dann herangezogen werden.

SAS berücksichtigt die Bindungen und adjustiert den Wert der Testgröße.

SAS

```
data bsp82;
  input alter $ a b c d e;
  arb_bed = 'A';  tage = a;  output;
  arb_bed = 'B';  tage = b;  output;
  arb_bed = 'C';  tage = c;  output;
  arb_bed = 'D';  tage = d;  output;
  arb_bed = 'E';  tage = e;  output;
cards;
18-20   5   4   4  10  12
21-25   5   4   4   8  15
26-30  10   7   5  10  15
31-35  25   8   9  10  18
36-40  22   8  10  15  21
41-45  27  10  10  23  26
46-50  30   9  12  28  32
;
                                   Programmteil zum Vergleich der Arbeitsbedingungen
title 'Vergleich der Arbeitsbedingungen (Behandlungen) - arb_bed';
proc freq;
  tables alter * arb_bed * tage / noprint cmh2 scores=rank;
run;
                                   Programmteil zum Vergleich der Altersgruppen
title 'Vergleich der Altersgruppen (Blocks) - alter';
proc freq;
  tables arb_bed * alter * tage / noprint cmh2 scores=rank;
run;
title;
```

Die Option `noprint` unterdrückt die Ausgabe der Kontingenztafel. Mit `cmh2` wird nur der Wert der χ^2-verteilten Testgröße ausgegeben und die Option `scores=rank` legt fest, daß Rangzahlen der Daten anstelle der Original-Daten ausgewertet werden sollen.

Von numerischen Abweichungen abgesehen, führt das SAS-Output mit den unter `Row Mean Scores Differ` aufgeführten Werten bzw. den dazugehörenden Überschreitungswahrscheinlichkeiten (`Prob`) zu den gleichen oben getroffenen Aussagen.

```
Vergleich der Arbeitsbedingungen (Behandlungen) -- arb_bed

SUMMARY STATISTICS FOR ARB_BED BY TAGE
CONTROLLING FOR ALTER

  Cochran-Mantel-Haenszel Statistics (Based on Rank Scores)

Statistic   Alternative Hypothesis    DF       Value      Prob
--------------------------------------------------------------
   1        Nonzero Correlation        1       2.594     0.107
   2        Row Mean Scores Differ     4      23.882     0.001

Total Sample Size = 35


Vergleich der Altersgruppen (Blocks) -- alter

SUMMARY STATISTICS FOR ALTER BY TAGE
CONTROLLING FOR ARB_BED

  Cochran-Mantel-Haenszel Statistics (Based on Rank Scores)

Statistic   Alternative Hypothesis    DF       Value      Prob
--------------------------------------------------------------
   1        Nonzero Correlation        1      27.240     0.001
   2        Row Mean Scores Differ     6      27.956     0.001

Total Sample Size = 35
```

Aufgabe 8.3: Es sollen drei Unterrichtsmethoden verglichen werden. Dazu wurden 15 Gruppen mit je drei für das Unterrichtsfach etwa gleich leistungsstarken Schülern gebildet. Die Schüler jeder Gruppe wurden zufällig den Unterrichtsmethoden zugeordnet. Das Prüfmerkmal ist die erreichte Punkteanzahl in einer nach Abschluß des Versuches geschriebenen Kontrollarbeit.
Die Nullhypothese - es gibt hinsichtlich der mittleren Punkteanzahl keine Unterschiede zwischen den Unterrichtsmethoden - ist gegen die Alternativhypothese - es gibt Unterschiede - bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ zu testen.[7]

	erreichte Punkteanzahl bei		
Blocks	Methode 1	Methode 2	Methode 3
1	13	15	16
2	15	13	17
3	12	14	15
4	14	15	16
5	12	14	15
6	13	13	17
7	11	14	9
8	13	12	13
9	11	12	15
10	12	14	13
11	9	10	13
12	11	14	14
13	10	9	9
14	7	9	14
15	10	6	8

[7] aus: CLAUß, G. und H. EBNER: Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen Volk und Wissen, Berlin, 1974, S. 315, 350

8.2 Die einfaktorielle Varianzanalyse

Die parametrischen Tests für den Vergleich von bis zu zwei Mittelwerten (s. Teil 1)

- t-Test zum Vergleich mit einer Konstanten
- t-Test zum Vergleich gepaarter Sichproben
- t-Test zum Vergleich unabhängiger Stichproben

setzen immer die Normalverteiltheit der Differenzen der Stichprobenwerte zur Konstanten, der Differenzen zwischen den gepaarten Stichprobenwerten bzw. der Stichprobenwerte voraus. Allerdings zeigen mehrere Untersuchungen, daß diese Tests robust gegen Abweichungen von der Normalverteilung sind.[8]

8.2.1 Der χ^2-Anpassungstest

Der χ^2-Test wird so genannt, weil die Testgröße unter der Nullhypothese χ^2-verteilt oder wenigstens approximativ χ^2-verteilt ist. Es gibt nicht *den* χ^2-Test. Auf der Grundlage einer unter der Nullhypothese χ^2-verteilten Testgröße werden im allgemeinen folgende Anwendungsfälle für einen χ^2-Test unterschieden:

Homogenitätstest: Entstammen zwei Beobachtungsreihen einer Grundgesamtheit mit derselben Verteilung?

Anpassungstest: Läßt sich die beobachtete Häufigkeitsverteilung derselben Grundgesamtheit wie die bekannte theoretische Verteilung zuordnen?

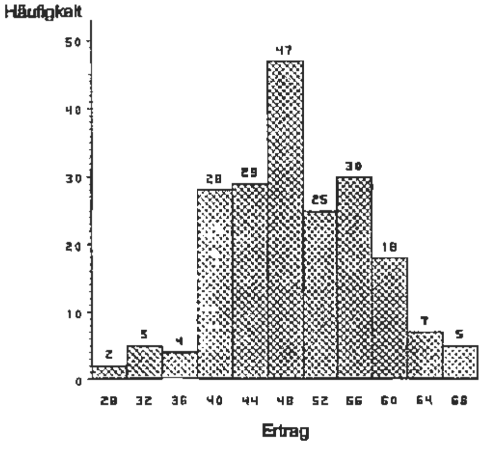
Unabhängigkeitstest: Entspricht bei zwei oder mehreren Merkmalen mit zwei oder mehreren Ausprägungen die Häufigkeitsverteilung der der erwarteten Verteilung in jeder Klasse? (Kontingenztafelanalyse)

Vergleich von Varianzen: Können die beobachtete Varianz und eine theoretische Varianz aus einer normalverteilten Grundgesamtheit derselben Grundgesamtheit zugerechnet werden?

Der hier interessierende Test ist der χ^2-Anpassungstest.

Beispiel 8.3

Die Häufigkeitsverteilung des Beispiels 5.2 soll mit einer Normalverteilung verglichen werden. Verbal lautet die zu testende Nullhypothese:
die beobachtete Häufigkeitsverteilung unterscheidet sich bei einem vorgegebenen Risiko 1. Art $\alpha = 0.05$ nicht von der Normalverteilung $N[\mu,\sigma^2]$. Die Häufigkeitsverteilung wird noch einmal in Abb. 8.3 wiedergegeben.



KLASSE	Frequency
1	2
2	5
3	4
4	32
5	41
6	39
7	36
8	26
9	8
10	5
11	2

Abb. 8.3 : Häufigkeitsverteilung von Beispiel 5.2

8 RASCH, D. and M. L. TIKU: Robustness of Statistical Methods and Nonparametric Statistics VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984

Der Wert für die untere Klassengrenze, der Startwert, war 24.5 und die Klassenbreite war 4.5. Somit ergibt sich nachstehende Klasseneinteilung, die um drei weitere Spalten erweitert wird.

Klasse i	Klassengrenzen	Klassenmitte x_i	Häufigkeit f_i	x_i^2	$x_i * f_i$	$x_i^2 * f_i$
1	>24.5 ... ≤29.0	26.75	2	715.5625	53.50	1431.1250
2	>29.0 ... ≤33.5	31.25	5	976.5625	156.25	4882.8125
3	>33.5 ... ≤38.0	35.75	4	1278.0625	143.00	5112.2500
4	>38.0 ... ≤42.5	40.25	32	1620.0625	1288.00	51842.0000
5	>42.5 ... ≤47.0	44.75	41	2002.5625	1834.75	82105.0625
6	>47.0 ... ≤51.5	49.25	39	2425.5625	1920.75	94596.9375
7	>51.5 ... ≤56.0	53.75	36	2889.0625	1935.00	104006.2500
8	>56.0 ... ≤60.5	58.25	26	3393.0625	1514.50	88219.6250
9	>60.5 ... ≤65.0	62.75	8	3937.5625	502.00	31500.5000
10	>65.0 ... ≤69.5	67.25	5	4522.5625	336.25	22612.8125
11	>69.5 ... ≤74.0	71.75	2	5148.0625	143.50	10296.1250
Summe			200		9827.50	496605.5000

Damit haben wir die ersten Werte, um die Schätzwerte für den Erwartungswert und die Varianz auszurechnen.

$$n = \sum_{i=1}^{m} f_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i * f_i = 49.1375 \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 * f_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i * f_i\right)^2}{n-1} = 36.9069$$

Es wird folglich getestet, ob die empirische Häufigkeitsverteilung annähernd normalverteilt ist mit dem Mittelwert 49,14 und der Varianz 36,91.

Die Transformation der Standardnormalverteilung N[0,1] in eine Normalverteilung $N[\mu,\sigma^2]$, deren Parameter aus der empirischen Häufigkeitsverteilung geschätzt werden, wird mit Hilfe der Größe *k* vorgenommen, wobei d die Klassenbreite und s die geschätzte Standardabweichung sind.

$$k = \frac{n * d}{s} = \frac{200 * 4.5}{\sqrt{36.91}} = \frac{900}{6.075} = 148.148 \;.$$

Nun wird die Tabelle fortgesetzt.

i	x_i	f_i	x_i^2	$x_i * f_i$	$x_i^2 * f_i$	$x_i - \bar{x}$	$u_i = \frac{\lvert x_i - \bar{x}\rvert}{s}$	$\varphi(u_i)$ (Tab. 8.2)	$\varphi(u_i)\,k$	E_i
1	26.75	2	715.5625	53.50	1431.1250	-22.39	3.69	0.0004	0.0593	
2	31.25	5	976.5625	156.25	4882.8125	-17.89	2.94	0.0053	0.7852	6.1037
3	35.75	4	1278.0625	143.00	5112.2500	-13.39	2.20	0.0355	5.2593	
4	40.25	32	1620.0625	1288.00	51842.0000	-8.89	1.46	0.1374	20.3555	20.3555
5	44.75	41	2002.5625	1834.75	82105.0625	-4.39	0.72	0.3078	45.6000	45.6000
6	49.25	39	2425.5625	1920.75	94596.9375	0.11	0.02	0.3989	59.0962	59.0962
7	53.75	36	2889.0625	1935.00	104006.2500	4.61	0.76	0.2989	44.2814	44.2814
8	58.25	26	3393.0625	1514.50	88219.6250	9.11	1.50	0.1295	19.1852	19.1852
9	62.75	8	3937.5625	502.00	31500.5000	13.61	2.24	0.0325	4.8148	
10	67.25	5	4522.5625	336.25	22612.8125	18.11	2.98	0.0047	0.6963	5.5704
11	71.75	2	5148.0625	143.50	10296.1250	22.61	3.72	0.0004	0.0593	

Tabelle 8.2: Werte der Dichtefunktion φ(u) der standardisierten Normalverteilung[9]

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	,39894	,39892	,39886	,39876	,39862	,39844	,39822	,39797	,39767	,39733
0,1	,39695	,39654	,39608	,39559	,39505	,39448	,39387	,39322	,39253	,39181
0,2	,39104	,39024	,38940	,38853	,38762	,38667	,38568	,38466	,38361	,38251
0,3	,38139	,38023	,37903	,37780	,37654	,37524	,37391	,37255	,37115	,36973
0,4	,36827	,36678	,36526	,36371	,36213	,36053	,35889	,35723	,35553	,35381
0,5	,35207	,35029	,34849	,34667	,34482	,34294	,34105	,33912	,33718	,33521
0,6	,33322	,33121	,32918	,32713	,32506	,32297	,32086	,31874	,31659	,31443
0,7	,31225	,31006	,30785	,30563	,30339	,30114	,29887	,29659	,29431	,29200
0,8	,28969	,28737	,28504	,28269	,28034	,27798	,27562	,27324	,27086	,26848
0,9	,26609	,26369	,26129	,25888	,25647	,25406	,25164	,24923	,24681	,24439
1,0	,24197	,23955	,23713	,23471	,23230	,22988	,22747	,22506	,22265	,22025
1,1	,21785	,21546	,21307	,21069	,20831	,20594	,20357	,20121	,19886	,19652
1,2	,19419	,19186	,18954	,18724	,18494	,18265	,18037	,17810	,17585	,17360
1,3	,17137	,16915	,16694	,16474	,16256	,16038	,15822	,15608	,15395	,15183
1,4	,14973	,14764	,14556	,14350	,14146	,13943	,13742	,13542	,13344	,13147
1,5	,12952	,12758	,12566	,12376	,12188	,12001	,11816	,11632	,11450	,11270
1,6	,11092	,10915	,10741	,10567	,10396	,10226	,10059	,09893	,09728	,09566
1,7	,09405	,09246	,09089	,08933	,08780	,08628	,08478	,08329	,08183	,08038
1,8	,07895	,07754	,07614	,07477	,07341	,07206	,07074	,06943	,06814	,06687
1,9	,06562	,06438	,06316	,06195	,06077	,05959	,05844	,05730	,05618	,05508
2,0	,05399	,05292	,05186	,05082	,04980	,04879	,04780	,04682	,04586	,04491
2,1	,04398	,04307	,04217	,04128	,04041	,03955	,03871	,03788	,03706	,03626
2,2	,03547	,03470	,03394	,03319	,03246	,03174	,03103	,03034	,02965	,02898
2,3	,02833	,02768	,02705	,02643	,02582	,02522	,02463	,02406	,02349	,02294
2,4	,02239	,02186	,02134	,02083	,02033	,01984	,01936	,01888	,01842	,01797
2,5	,01753	,01709	,01667	,01625	,01585	,01545	,01506	,01468	,01431	,01394
2,6	,01358	,01323	,01289	,01256	,01223	,01191	,01160	,01130	,01100	,01071
2,7	,01042	,01014	,00987	,00961	,00935	,00909	,00885	,00861	,00837	,00814
2,8	,00792	,00770	,00748	,00727	,00707	,00687	,00668	,00649	,00631	,00613
2,9	,00595	,00578	,00562	,00545	,00530	,00514	,00499	,00485	,00470	,00457

u	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	,00443	,00327	,00238	,00172	,00123	,00087	,00061	,00042	,00029	,00020
4,0	,00013	,00009	,00006	,00004	,00002	,00002	,00001	,00001	-	-

[9] Verfahren 1/51/0010, S. 375, aus:
RASCH, D.; HERRENDÖRFER, G.; BOCK, J.; VICTOR, N. GUIARD, V.:
Verfahrensbibliothek Versuchsplanung und -auswertung
R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, Band 1, 1996

Die erwarteten Klassenhäufigkeiten $E_i = \varphi(u_i)\ k$ werden von den Verteilungsrändern ausgehend zusammengelegt, wenn sie kleiner als 4 sind. Mit dem χ^2-Test werden die dann gleichfalls zusammenzulegenden beobachteten Häufigkeiten f_i und die erwarteten Häufigkeiten E_i in Relation gesetzt

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_i - E_i)^2}{E_i} \quad .$$

Dafür wird die Tabelle fortgesetzt.

i	f_i		E_i	$f_i - E_i$	$(f_i - E_i)^2$	$\frac{(f_i - E_i)^2}{E_i}$
1	2					
2	5	11	6.1037	4.896	23.974	0.393
3	4					
4	32	32	20.3555	11.645	135.594	0.666
5	41	41	45.6000	-4.600	21.160	0.046
6	39	39	59.0962	-20.096	403.857	0.683
7	36	36	44.2814	-8.281	68.582	0.155
8	26	26	19.1852	6.815	46.441	0.242
9	8					
10	5	15	5.5704	9.430	88.917	1.596
11	2					
Summe						3.7819 $= \chi^2$

Die Freiheitsgrade FG sind die Differenz aus der Anzahl der (zusammengelegten) Klassen und 2, da die beiden Parameter Erwartungswert und Varianz geschätzt werden, vermindert um 1:

FG = 7 - 2 - 1 = 4 .

Da $\chi^2 = 3.7819 < 9.488 = \chi^2_{0.95;\,4}$ (Tab. 8.1) kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. Die beobachtete Häufigkeitsverteilung unterscheidet sich nicht von der Normalverteilung mit den Schätzwerten für den Erwartungswert $\overline{x} = 49{,}14$ und für die Varianz $s^2 = 36{,}91$.

Werden die beobachteten und die erwarteten Häufigkeiten in einer Grafik vereint, ergibt sich das in der Abb. 8.4 dargestellte Bild.

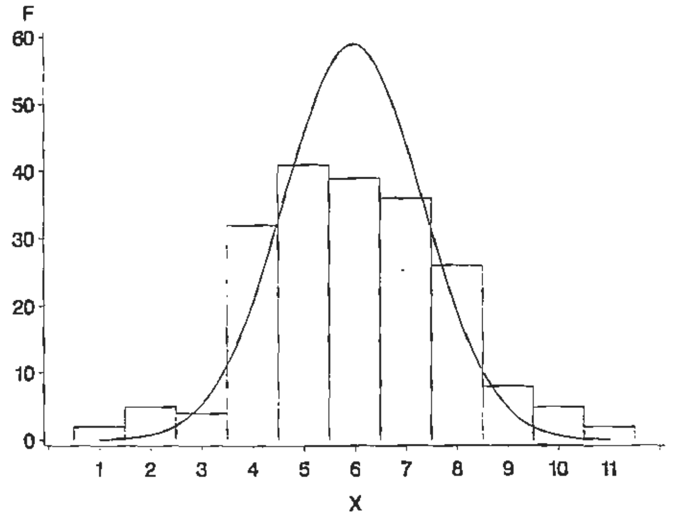


Abb. 8.4: Grafischer Vergleich der beobachteten und der normalverteilten erwarteten Häufigkeiten

Das SAS-Programm zum Zeichnen dieser Grafik ist schon ein bißchen aufwendiger und soll deshalb auch nur für Interessierte angegeben werden.

```
/* SAS-Programm für die Grafik Abb. 8.4 ========================================*/
data vergl;
  input x f e;
  n = _n_;
  call symput('n',n);
cards;
26.75    2    0.0593
31.25    5    0.7852
35.75    4    5.2593
40.25   32   20.3555
44.75   41   45.6000
49.25   39   59.0962
53.75   36   44.2814
58.25   26   19.1852
62.75    8    4.8148
67.25    5    0.6963
71.75    2    0.0593
;
data graf;
  do i=1 to &n;
    j=3; set vergl;           zf=f;           output;
    j=2;            x =x-2.25;        e=missing; output;
    j=1;                      f= 0;           output;
    j=4;            x =x+4.5;  f=zf;          output;
    j=5;                      f= 0;           output;
  end;
proc sort;   by i j;
proc format;
  value xfmt
  22.25='  ' 26.75=' 1' 31.25=' 2' 35.75=' 3' 40.25=' 4' 44.75=' 5' 49.25=' 6'
  53.75=' 7' 58.25=' 8' 62.75=' 9' 67.25='10' 71.75='11' 76.25='  ';
goptions ftext=swiss   htext=1.8 ;
symbol1 c=black v=none i=join   l=1 w=1;
symbol2 c=black v=none i=spline l=1 w=3;
axis1 c=black minor=none order=
  (22.25 26.75 31.25 35.75 40.25 44.75 49.25 53.75 58.25 62.75 67.25 71.75 76.25);
axis2 c=black minor=none;
proc gplot;
  plot f*x = 1
       e*x = 2  / overlay  haxis=axis1  vaxis=axis2 ;
  format x xfmt.;
run;  quit;
/* Ende des SAS-Programms  =================================================== */
```

SAS verwendet zur Prüfung auf Normalverteiltheit nicht den χ^2-Test. Die Realisierung des Vergleichs einer beobachteten Häufigkeitsverteilung mit der Normalverteilung wird mit Hilfe der Prozedur `univariate` unter Verwendung der Option `normal` vorgenommen. Dabei wird für ein Stichprobenumfang $n \leq 2000$ die Shapiro-Wilk-Teststatistik W und für $n > 2000$ die Kolmogorov-Teststatistik D herangezogen. Die dazugehörigen Überschreitungswahrscheinlichkeiten werden ausgegeben. Für den Shapiro-Wilk-Test besteht die Zielstellung darin, den aus einer Regressionsschätzung gewonnenen Schätzwert für die Varianz σ^2 gegen den „üblichen" Schätzwert s^2 zu testen, wobei die Stichprobenwerte bei Annahme der Nullhypothese auf die Normalverteilung N(0 , 1) standardisiert werden. Weitere Ausführungen können unter anderem bei DUFNER u. a. (1992)[10] nachgelesen werden. Hingegen ist der Kolmogorov-Test ein nichtparametrischer Test bei dem die Testgröße aus der normierten Maximalabweichung der empirischen Häufigkeitsverteilung von der Normalverteilung berechnet wird. Zum Erkennen von Abweichungen von der Normalverteilung ist er gut geeignet, zumal er nicht die Varianz (und damit eventuelle Varianzinhomogenitäten) für die Testgröße heranzieht.
Die Option `plot` liefert Text-Grafiken.

SAS-Programm:

```
data bsp52;
  infile 'W_ERTRAG.DAT';
  input ertrag @@;
proc univariate normal plot;
  var ertrag;
run;   quit;
```

[10] DUFNER, J., U. JENSEN und E. SCHUMACHER: Statistik mit SAS. B. G.Teubner, Stuttgart 1992, S. 155 f

SAS-Ausgabe:

```
Univariate Procedure

Variable=ERTRAG
```
①
```
                    Moments

 N                 200   Sum Wgts         200
 Mean           49.265   Sum             9853
 Std Dev       8.16946   Variance    66.74008
 Skewness     0.087564   Kurtosis    0.075015
 USS          498689.3   CSS         13281.27
 CV           16.58269   Std Mean    0.577668
 T:Mean=0     85.28254   Pr>|T|        0.0001
 Num ^= 0          200   Num > 0          200
 M(Sign)           100   Pr>=|M|       0.0001
 Sgn Rank        10050   Pr>=|S|       0.0001
 W:Normal     0.984326   Pr<W          0.6332
```
②
```
               Quantiles(Def=5)

 100% Max       71.8          99%      69.75
  75% Q3        54.9          95%      63.55
  50% Med      49.15          90%      59.35
  25% Q1       43.45          10%      39.85
   0% Min       26.5           5%         37
                               1%       29.4

 Range          45.3
 Q3-Q1         11.45
 Mode           46.9

                    Extremes

    Lowest      Obs     Highest     Obs
      26.5(      44)        67(      81)
      28.8(      30)      67.9(     158)
        30(      12)      69.4(     140)
        32(     114)      70.1(      55)
      32.2(     177)      71.8(     126)
```
③
```
Univariate Procedure

Variable=ERTRAG

Stem Leaf                            #  Boxplot
     70 18                           2     |
     68 4                            1     |
     66 09                           2     |
     64 1614                         4     |
     62 256                          3     |
     60 25602                        5     |
     58 0346680011666               13     |
     56 22222588936                 11     |
     54 0013444589990135678         19  +-----+
     52 223368923335678             15  |     |
     50 1355569078                  10  |     |
     48 01244688901223366666788899  26  *--+--*
     46 011255577899999024669       21  |     |
     44 1113567566689               13  |     |
     42 0112671234455668            16  +-----+
     40 001223448912444669          18     |
     38 8902226889                  10     |
     36 73                           2     |
     34 66                           2     |
     32 0225                         4     |
     30 0                            1     |
     28 8                            1     |
     26 5                            1     |
        ----+----+----+----+----+-
```

④

```
                 Normal Probability Plot
71+                                                **
  |                                              *+++
  |                                              **+
  |                                         ***+
  |                                        **+
  |                                       **
  |                                  ****
  |                                 ***
  |                              ****
  |                            ***
  |                          +**
49+                        ****
  |                     ****
  |                   ***
  |                 ***
  |             ****
  |         ****+
  |        **++
  |       **
  |    **+*
  |  +*
  |+*
27+*
   +----+----+----+----+----+----+----+----+----+----+
       -2        -1         0        +1        +2
```

Aus dem ersten Ausgabeblock ①, der einige statistische Maßzahlen und die dazugehörigen Überschreitungswahrscheinlichkeiten enthält, interessiert für den Test auf Normalverteilung der beobachteten Häufigkeiten nur die letzte Zeile:

```
W:Normal   0.984326   Pr<W          0.6332
```

Sie zeigt an, daß die Testgröße W des Shapiro-Wilk-Testes berechnet wurde und die Überschreitungswahrscheinlichkeit nicht kleiner als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ ist. Die Nullhypothese kann folglich nicht verworfen werden und es kann angenommen werden, daß die beobachteten Häufigkeiten annähernd normalverteilt sind.

Die Quartile (Ausgabeblock ②) weisen auf eine symmetrische Verteilung hin:

```
75% Q3       54.9
50% Med      49.15            Q3-Q1          11.45
25% Q1       43.45
```

q1 + (q3-q1)/2 = 43.45 + 11.45/2 = 49.175 unterscheidet sich kaum vom Median = 49.15.
Selbst die halbe Spannweite (`Range = 45.3`) von 22.65 zum Minimum hinzuaddiert ergibt den Median: 26.5 + 22.65 = 49.15!

Die durch die Option `plot` erzeugten Text-Grafiken (Ausgabeblöcke ③ und ④) charakterisieren mit unterschiedlichen Mitteln die Verteilung der Daten. Der Stem-and-Leaf Plot ist eine Häufigkeitsverteilung mit Klasseneinteilung. Für den betrachteten Ertrag lauten die Klassengrenzen: $26 \leq z < 28$, $28 \leq z < 30$,... , $68 \leq z < 70$, $70 \leq z < 72$. Die einzelnen Werte sind dann innerhalb ihrer Klassengrenze nur mit ihren Nachkommastellen (ganzzahlig) gerundet aufgeführt. So bedeutet beispielsweise die Zuordnung

```
42 0112671234455668        ,
```

daß in der Klasse $42 \leq z < 44$ die Ertragsdaten

```
42.0  42.1  42.1  42.2  42.6  42.7  43.1  43.2
43.3  43.4  43.4  43.5  43.5  43.6  43.6  43.8
```

liegen, die durch ihre Nachkommastelle in geordneter Reihenfolge wiedergegeben werden. Eine eineindeutige Zuordnung ist damit nicht möglich. Bei mehreren Nachkommastellen wird auf die erste Stelle nach dem Komma gerundet ausgegeben, beispielsweise a.77 wird in der entsprechenden Klasse mit 8 abgetragen.

In der Regel befindet sich rechts neben dem Stem-and-Leaf Plot ein Boxplot. Im Boxplot werden das 1. Quartil Q1 (25%-Quantil) und das 3. Quartil Q3 (75%-Quantil) mit horizontalen Linien dargestellt und so vertikal miteinander verbunden, daß eine Box gebildet wird. Der Median, das 2. Quartil (50%-Perzentil), wird innerhalb der Box durch eine horizontale Linie markiert, die an jeder Seite mit * begrenzt wird. Den arithmetischen Mittelwert kennzeichnet das Zeichen + . Außerhalb der Box liegende Werte werden bis zu 1.5*(Q3-Q1) mit einem Strich, bis 3*(Q3-Q1) mit Null und Extremwerte über dem Bereich von 3*(Q3-Q1) mit einem Stern veranschaulicht.

Im Normalverteilungsplot (Ausgabeblock ④) werden die Variablenwerte auf der Ordinate über den Quantilen der Standardnormalverteilung auf der Abszisse durch das Zeichen * dargestellt. Die Referenzlinie der Standardnormalverteilung wird durch das Zeichen + angegeben. Bei ungenügender Übereinstimmung der beiden Zeichen sind die Abweichungen von der Normalverteilung gut sichtbar.

8.2.2 Zum Grundgedanken der Varianzanalyse

Für den Vergleich zweier Mittelwerte sind der t-Test und der Welch-Test bekannt. Bei mehr als zwei zu vergleichenden Mittelwerten bedient man sich der Varianzanalyse.
Ausgehend vom Beispiel 8.1
Drei Applikationsverfahren (Spritzen, Sprühen, Feinsprühen) sollen bei der Ausbringung eines Herbizides in ihrer mittleren Wirkung auf die Unkräuter von Getreideparzellen verglichen werden.
Das Prüfmerkmal ist die Frischmasse der Unkräuter in g. Vorgegeben wird eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$.

Spritzen	Sprühen	Feinsprühen
8,0	14,8	18,2
11,4	10,4	18,7
8,6	12,0	14,0
15,0	16,9	14,9
16,9	14,3	15,0
11,9	13,4	15,8
10,6	14,9	15,7
12,4	10,8	12,4

soll zunächst überprüft werden, ob die Daten der einzelnen Stichproben annähernd normalverteilt sind. Um falsche Schlußfolgerungen zu vermeiden, wird darauf hingewiesen, daß das keinesfalls eine Voraussetzung für die Varianzanalyse ist!

SAS-Programm:

V1: Spritzen, V2: Sprühen, V3: Feinsprühen

```
data bsp81;
  input v1-v3;
cards;
 8.0  14.8  18.2
11.4  10.4  18.7
 8.6  12.0  14.0
15.0  16.9  14.9
16.9  14.3  15.0
11.9  13.4  15.8
10.6  14.9  15.7
12.4  10.8  12.4
;
proc univariate normal;
  var v1-v3;
run;
```

Das auf der folgenden Seite wiedergegebene SAS-Output zeigt, daß die Nullhypothese nicht abgelehnt werden kann, die Daten folglich für jedes der drei Applikationsverfahren annähernd normalverteilt sind.

```
Univariate Procedure      Variable=V1

                Moments                          Quantiles(Def=5)                              Extremes

 N                8  Sum Wgts          8  100% Max     16.9        99%     16.9    Lowest    Obs     Highest     Obs
 Mean         11.85  Sum            94.8   75% Q3      13.7        95%     16.9         8(     1)      11.4(       2)
 Std Dev   2.997141  Variance   8.982857   50% Med    11.65        90%     16.9       8.6(     3)      11.9(       6)
 Skewness  0.472397  Kurtosis   -0.29972   25% Q1       9.6        10%        8      10.6(     7)      12.4(       8)
 USS        1186.26  CSS           62.88    0% Min        8         5%        8      11.4(     2)        15(       4)
 CV        25.29233  Std Mean    1.05965                            1%        8      11.9(     6)      16.9(       5)
 T:Mean=0  11.18294  Pr>|T|       0.0001  Range         8.9
 Num ^= 0         8  Num > 0           8  Q3-Q1         4.1
 M(Sign)          4  Pr>=|M|      0.0078  Mode            8
 Sgn Rank        18  Pr>=|S|      0.0078
 W:Normal  0.956236  Pr<W         0.7743

Univariate Procedure      Variable=V2

                Moments                          Quantiles(Def=5)                              Extremes

 N                8  Sum Wgts          8  100% Max     16.9        99%     16.9    Lowest    Obs     Highest     Obs
 Mean       13.4375  Sum           107.5   75% Q3     14.85        95%     16.9      10.4(     2)      13.4(       6)
 Std Dev   2.235389  Variance   4.996964   50% Med    13.85        90%     16.9      10.8(     8)      14.3(       5)
 Skewness  -0.02613  Kurtosis    -0.9167   25% Q1      11.4        10%     10.4        12(     3)      14.8(       1)
 USS        1479.51  CSS        34.97875    0% Min     10.4         5%     10.4      13.4(     6)      14.9(       7)
 CV        16.63545  Std Mean   0.790329                            1%     10.4      14.3(     5)      16.9(       4)
 T:Mean=0   17.0024  Pr>|T|       0.0001  Range         6.5
 Num ^= 0         8  Num > 0           8  Q3-Q1        3.45
 M(Sign)          4  Pr>=|M|      0.0078  Mode         10.4
 Sgn Rank        18  Pr>=|S|      0.0078
 W:Normal  0.952804  Pr<W         0.7410

Univariate Procedure      Variable=V3

                Moments                          Quantiles(Def=5)                              Extremes

 N                8  Sum Wgts          8  100% Max     18.7        99%     18.7    Lowest    Obs     Highest     Obs
 Mean       15.5875  Sum           124.7   75% Q3        17        95%     18.7      12.4(     8)        15(       5)
 Std Dev   2.072567  Variance   4.295536   50% Med    15.35        90%     18.7        14(     3)      15.7(       7)
 Skewness  0.237071  Kurtosis   -0.24799   25% Q1     14.45        10%     12.4      14.9(     4)      15.8(       6)
 USS        1973.83  CSS        30.06875    0% Min     12.4         5%     12.4        15(     5)      18.2(       1)
 CV        13.29634  Std Mean   0.732763                            1%     12.4      15.7(     7)      18.7(       2)
 T:Mean=0  21.27222  Pr>|T|       0.0001  Range         6.3
 Num ^= 0         8  Num > 0           8  Q3-Q1        2.55
 M(Sign)          4  Pr>=|M|      0.0078  Mode         12.4
```

Von den Maßzahlen, die `Proc Univariante` liefert, sollen noch ein paar interessieren:

Applikationsverfahren	i	Mittelwert $\overline{y}_{i\bullet}$	Varianz s_i^2	Standardabweichung s_i
Spritzen	1	11.85	8.9829	2.9971
Sprühen	2	13.4375	4.9970	2.2354
Feinsprühen	3	15.5875	4.2955	2.0726

Gemessen an der mittleren Wirkung sind Unterschiede erkennbar. Ob sie allerdings als signifikante, wesentliche Unterschiede gewertet werden müssen, hängt im wesentlichen von den Variabilitäten ab. Schaut man sich die Standardabweichungen der drei Applikationsverfahren an, so unterscheiden sie sich nicht sehr stark.

Wird mit den obigen Schätzwerten der Erwartungswerte und der Varianzen die jeweilige Normalverteilung konstruiert und zusammen mit der Lage der Einzelwerte gezeichnet, entsteht ein in der Abb. 8.5 dargestelltes Bild. Ein mögliches SAS-Programm ist für interessierte Leser nachstehend angegeben.

```
/* SAS-Programm für die Grafik Abb. 8.5 ======================================== */
data daten;
  y = 0; set bsp81;
data normal;
  pi = 2 * arsin(1);
  do u  = -3 to 3 by 0.2;
     y  = (1/sqrt(2*pi))*exp(-(u*u)/2);
     u1 = u * 2.997141 + 11.85;
     u2 = u * 2.235389 + 13.4375;
     u3 = u * 2.072567 + 15.5875;
     output;
  end;
proc sort;  by y;
data merge;
  merge daten normal;  by y;
data graf;
  set merge;
  if v1^=missing then z=v1; else
  if v2^=missing then z=v2; else
  if v3^=missing then z=v3; else
  if u1^=missing then z=u1; else
  if u2^=missing then z=u2; else
  if u3^=missing then z=u3;
proc sort;  by z;
goptions htext=1  ftext=swiss;
symbol1 c=black h=1.5 v=triangle i=none;
symbol2 c=black h=1.5 v=circle   i=none;
symbol3 c=black h=1.5 v=hash     i=none;
symbol4 c=black       v=none     i=spline;
axis1 c=white label=none minor=none order=(-0.1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5);
axis2 c=black label=("Frischmasse [g]") minor=none order=(2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22);
proc gplot;
  plot y*v1 = 1   y*v2 = 2   y*v3 = 3
       y*u1 = 4   y*u2 = 4   y*u3 = 4
     / overlay
       lhref=2
       href= 11.85 13.4375 15.5875  13.625
       vaxis=axis1
       haxis=axis2
     ;
run;
quit;
/* Ende des SAS-Programms  ===================================================== */
```

Berechnet werden nun die Abweichungen der Einzelwerte y_{ij} jeder der i = 1, 2, 3 Stichproben von dem jeweiligen Stichprobenmittelwert $e_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_{i\bullet}$. Damit ist klar, daß die Summe der Abweichungen für jede Stichprobe Null ist: $\sum_j e_{ij} = e_{i\bullet} = 0$ (für i = 1, 2, 3) . Die Varianz der Einzelwerte und die der Abweichungen ist dieselbe, weil der Unterschied zwischen den Werten eine Konstante, nämlich der Stichprobenmittelwert, ist (s. Teil 1, S. 49)!

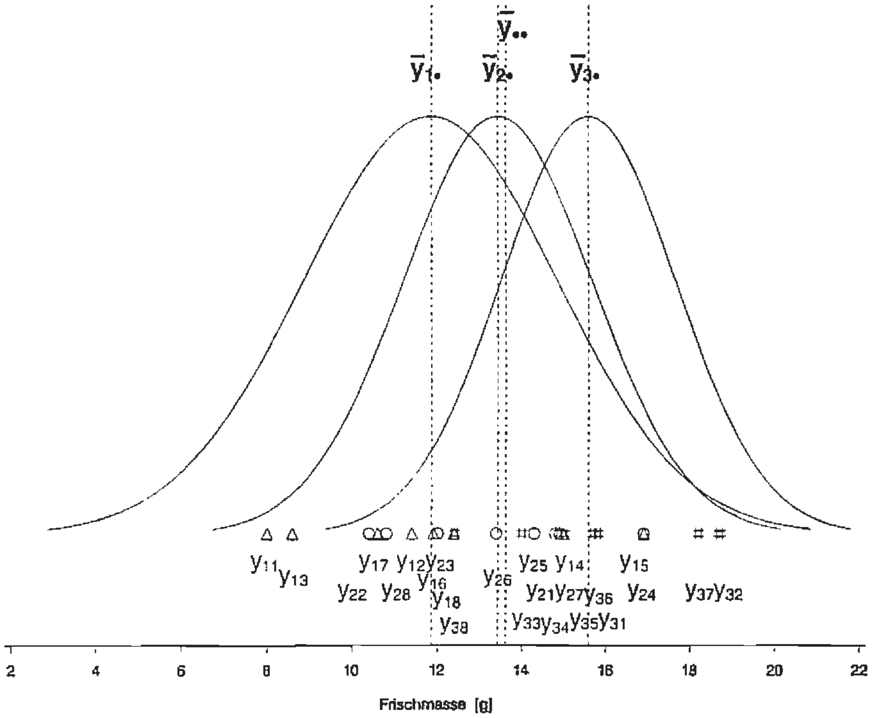


Abb. 8.5:

Die Daten von Beispiel 8.1 mit den jeweiligen Normalverteilungen
(Δ : Spritzen,
O : Sprühen,
: Feinsprühen)

$\bar{y}_{1.}$: mittlere Frischmasse nach Spritzen

$\bar{y}_{2.}$: mittlere Frischmasse nach Sprühen

$\bar{y}_{3.}$: mittlere Frischmasse nach Feinsprühen

$\bar{y}_{..}$: mittlere Frischmasse nach beliebiger Applikation

Die nachstehende Tabelle 8.3 soll diese Feststellung demonstrieren.

Tabelle 8.3: Abweichungen der Einzelwerte (Beispiel 8.1)

	y_{ij}	$\bar{y}_{i.}$	s_i^2	$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$	$\bar{e}_{i.}$	s_i^2
Spritzen	8,0			-3,8500		
	11,4			-0,4500		
(i = 1)	8,6			-3,2500		
	15,0			3,1500		
	16,9			5,0500		
	11,9			0,0500		
	10,6			-1,2500		
	12,4			0,5500		
		11,85	8,9829		0	8,9829
Sprühen	14,8			1,3625		
	10,4			-3,0375		
(i = 2)	12,0			-1,4375		
	16,9			3,4625		
	14,3			0,8625		
	13,4			-0,0375		
	14,9			1,4625		
	10,8			-2,6375		
		13,4375	4,9970		0	4,9970
Feinsprühen	18,2			2,6125		
	18,7			3,1125		
(i = 3)	14,0			-1,5875		
	14,9			-0,6875		
	15,0			-0,5875		
	15,8			0,2125		
	15,7			0,1125		
	12,4			-3,1875		
		15,5875	4,2955		0	4,2955

Jeder einzelne Beobachtungswert ist darstellbar als $\quad y_{ij} = \bar{y}_{i.} + e_{ij}$.

Nun geht es ja nicht darum, Aussagen über die Stichproben zu treffen. Mit Hilfe *repräsentativer* Stichproben sollen Aussagen über die Grundgesamtheiten gemacht werden. Und mit der Varianzanalyse soll getestet werden, ob sich die n durch die Stichproben repräsentierten Grundgesamtheiten in ihrer mittleren Wirkung statistisch unterscheiden. Dazu braucht man ein Modell, das hinsichtlich der Grundgesamtheiten formuliert wird:

$$\underline{y}_{ij} = \mu_i + \underline{\varepsilon}_{ij} \quad ,$$

die Nullhypothese

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a = \mu \qquad \text{bzw.} \quad H_0 : \mu_i - \mu = 0 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, a$$

und die Alternativhypothese

$$H_A : \mu_i \neq \mu_{i'} \qquad \text{für mindestens ein Paar } i, i' = 1, 2, \ldots, a \quad .$$

Dabei sind:

μ: Erwartungswert des Versuches,
μ_i: Erwartungswert der i-ten Stichprobe
$\underline{\varepsilon}_{ij}$: Zufallsvariable .

Sichtbar werden nun die Voraussetzungen für die Anwendung der Varianzanalyse:

- es gilt das obige additive, lineare Modell,
- der Fehlerterm $\underline{\varepsilon}_{ij}$ ist eine unabhängige Zufallsvariable
- der Erwartungswert der Fehlerkomponente ist Null: $E(\underline{\varepsilon}_{ij}) = 0$,
  deren Varianzen sind für alle i und j gleich: $VAR(\underline{\varepsilon}_{ij}) = \sigma^2$
- die Zufallsvariable $\underline{\varepsilon}_{ij}$ ist normalverteilt .

Daß die Gleichheit der Varianzen, die Varianzhomogenität: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots \sigma_a^2 = \sigma$, notwendig vorausgesetzt wird (eine Bedingung, die auch für den t-Test gilt), soll die Abb. 8.6 verdeutlichen. Die dargestellten Normalverteilungen mögen die Häufigkeitsverteilungen dreier Stichproben in der Grundgesamtheit charakterisieren.

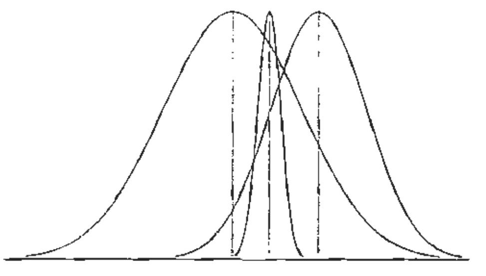


Abb. 8.6: Demonstration zur Varianzhomogenität als Voraussetzung für die Anwendung der Varianzanalyse

Die mittlere Verteilung ist bedeutend schmaler als die beiden anderen. Hinsichtlich dieser unterschiedlichen Verteilungen wird wohl kaum einer davon ausgehen, daß diese drei Verteilungen ein und derselben Grundgesamtheit angehören. Ein Vergleich der Mittelwerte, bei dem ja die Variabilitäten zu berücksichtigen sind, wäre unangebracht und (s. o.) unzulässig.
Als letzte Voraussetzung für die Anwendung der Varianzanalyse ist die Normalverteiltheit des Fehlerkomponente aufgeführt. Diese Voraussetzung bezieht sich tatsächlich nur auf den Fehlerterm und nicht auf die Daten. Sie bleibt auch bei mehrfaktoriellen (additiven und linearen) Modellen mit mehreren Fehlertermen nur auf diese begrenzt.

Selten wird das Modell die obige Form $\underline{y}_{ij} = \mu_i + \underline{\varepsilon}_{ij}$ verwendet, sondern $\underline{y}_{ij} = \mu + a_i + \underline{\varepsilon}_{ij}$, wobei

a_i: der Effekt der i-ten Stufe des Faktors A (i-te Stichprobe).

Da nun ein weiterer Parameter eingeführt wird, müssen an den auch Bedingungen, Reparametrisierungsbedingungen, gestellt werden:

- $\sum_{i=1}^{a} a_i = 0$.

Geschätzt werden können diese Effekte a_i durch

$\hat{a}_i = \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}$, wobei $\bar{y}_{\cdot\cdot}$ der Schätzwert für den Erwartungswert des Versuches μ ist .

Was passiert nun bei der Varianzanalyse?

Die Variabilität kann auf verschiedenen Wegen geschätzt werden:

- als Gesamtvarianz, die aus allen zusammengenommenen Beobachtungswerten berechnet wird - sie korrespondiert mit dem Gesamtmittel des Versuches

1	2	3	4	5	...	a	
y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	y_{51}		y_{a1}	
y_{12}	y_{22}	y_{32}	y_{42}	y_{52}		y_{a2}	
y_{13}	y_{23}	y_{33}	y_{43}	y_{53}		y_{a3}	
y_{14}	y_{24}	y_{34}	y_{44}	y_{54}		y_{a4}	s^2_{gesamt}
...	...	...	...	...		...	
y_{1r_1}	y_{2r_2}	y_{3r_3}	y_{4r_4}	y_{5r_5}		y_{ar_a}	
$\bar{y}_{1\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$	$\bar{y}_{3\cdot}$	$\bar{y}_{4\cdot}$	$\bar{y}_{5\cdot}$	...	$\bar{y}_{a\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

- als Varianz innerhalb jeder Stichprobe, sie steht in Bezug zu den Mittelwerten der einzelnen Stichproben

1	2	3	4	5	...	a	
y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	y_{51}		y_{a1}	
y_{12}	y_{22}	y_{32}	y_{42}	y_{52}		y_{a2}	
y_{13}	y_{23}	y_{33}	y_{43}	y_{53}		y_{a3}	
y_{14}	y_{24}	y_{34}	y_{44}	y_{54}		y_{a4}	
...	...	...	...	...		...	
y_{1r_1}	y_{2r_2}	y_{3r_3}	y_{4r_4}	y_{5r_5}		y_{ar_a}	
$\bar{y}_{1\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$	$\bar{y}_{3\cdot}$	$\bar{y}_{4\cdot}$	$\bar{y}_{5\cdot}$	...	$\bar{y}_{a\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$
s_1^2	s_2^2	s_3^2	s_4^2	s_5^2		s_a^2	$s^2_{innerhalb}$

- als Varianz zwischen den Stichproben, die die Mittelwerte der einzelnen Stichproben bezüglich des Gesamtmittels des Versuches betrachten

1	2	3	4	5	...	a		
y_{11}	y_{21}	y_{31}	y_{41}	y_{51}		y_{a1}		
y_{12}	y_{22}	y_{32}	y_{42}	y_{52}		y_{a2}		
y_{13}	y_{23}	y_{33}	y_{43}	y_{53}		y_{a3}		
y_{14}	y_{24}	y_{34}	y_{44}	y_{54}		y_{a4}		
...	...	...	...	...		...		
y_{1r_1}	y_{2r_2}	y_{3r_3}	y_{4r_4}	y_{5r_5}		y_{ar_a}		
$\bar{y}_{1\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$	$\bar{y}_{3\cdot}$	$\bar{y}_{4\cdot}$	$\bar{y}_{5\cdot}$	...	$\bar{y}_{a\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$	$s^2_{zwischen}$

Die Varianz innerhalb der Stichproben stellt die Versuchsstreuung dar. Wenn die Nullhypothese gilt, dann stimmen die Schätzwerte $s^2_{innerhalb}$ und $s^2_{zwischen}$ bis auf zufällige Abweichungen überein. Diese Prüfung wird mit Hilfe des F-Testes vorgenommen.

Papier und Bleistift

Die notwendigen Summen und Quadrate lassen sich am besten mit Hilfe einer Tabelle berechnen. Dabei werden folgende Symbole verwendet:

SQ: Summe der Abweichungsquadrate, FG: Freiheitsgrade

MQ: mittlere quadratische Abweichung = Varianzschätzer = Quotient aus SQ und FG

	Spritzen A_1	A_1^2	Sprühen A_2	A_2^2	Feinsprühen A_3	A_3^2	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2$
	8,0	64,00	14,8	219,04	18,2	331,24		
	11,4	129,96	10,4	108,16	18,7	349,69		
	8,6	73,96	12,0	144,00	14,0	196,00		
	15,0	225,00	16,9	285,61	14,9	222,01		
	16,9	285,61	14,3	204,49	15,0	225,00		
	11,9	141,61	13,4	179,56	15,8	249,64		
	10,6	112,36	14,9	222,01	15,7	246,49		
	12,4	153,76	10,8	116,64	12,4	153,76		
Summe	94,8	1186,26	107,5	1479,51	124,7	1973,83	327,0	4639,60

$$\text{Subtraktionsglied Sgl} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{N} = \frac{327*327}{24} = 4455{,}375 \qquad \text{(Hilfsgröße)}$$

$$SQ_{gesamt} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \text{Sgl} = 4639{,}600 - 4455{,}375 = 184{,}225$$

$$FG_{gesamt} = N - 1 = 24 - 1 = 23$$

$$MQ_{gesamt} = s^2_{gesamt} = \frac{SQ_{gesamt}}{FG_{gesamt}} = \frac{184{,}225}{23} = 8{,}01$$

$$SQ_{zwischen} = \sum_{i=1}^{a}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{r_i} - \text{Sgl} = \frac{94{,}8*94{,}8}{8} + \frac{107{,}5*107{,}5}{8} + \frac{124{,}7*124{,}7}{8} - \text{Sgl}$$

$$= 4511.6725 - 4455{,}375 = 56{,}2975$$

$$FG_{zwischen} = a - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$MQ_{zwischen} = s^2_{zwischen} = \frac{SQ_{zwischen}}{FG_{zwischen}} = \frac{56{,}2975}{2} = 28{,}149$$

$$SQ_{innerhalb} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{r_i} = SQ_{gesamt} - SQ_{zwischen} = 184{,}225 - 56{,}2975 = 127{,}9275$$

$$FG_{innerhalb} = N - a = 24 - 3 = 21 \qquad = FG_{gesamt} - FG_{zwischen}$$

$$MQ_{innerhalb} = s^2_{innerhalb} = \frac{SQ_{innerhalb}}{FG_{innerhalb}} = \frac{127{,}9275}{21} = 6{,}092$$

Das Zusammenspiel der Summen der Abweichungsquadrate veranschaulicht die Abb. 8. 7. Die a Stichproben werden als Stufen eines Prüffaktors A aufgefaßt. Prüffaktoren werden im allgemeinen mit Großbuchstaben, beginnend mit A, gekennzeichnet. Damit wird auch die Bezeichnung: einfaktorielle Varianzanalyse klar. Der verbleibende Rest sind dann die Variabilitäten innerhalb der Stichproben (Faktorstufen). Die Bezeichnung ist Rest oder Fehler.

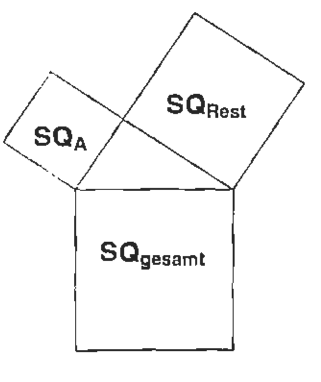
Die eigentliche Testgröße ist der Quotient aus s^2_A und s^2_{Rest} :

$$F = \frac{s^2_A}{s^2_{Rest}} \quad ,$$

[H_0: $\sigma^2_A = \sigma^2_{Rest}$ (die Variabilität der Residuen ε_{ij} unterscheidet sich nicht von der des Prüffaktors A)
H_A: $\sigma^2_A > \sigma^2_{Rest}$]

der mit dem Quantil der F-Verteilung für die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α und den Freiheitsgraden FG_A und FG_{Rest} verglichen wird.

Abb. 8.7: Der grafische Zusammenhang der Summen der Abweichungsquadrate bei der einfaktoriellen Varianzanalyse



$$SQ_{gesamt} = SQ_{zwischen\ den\ Stichproben} + SQ_{Rest}$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n_i} n_i\left(\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{..}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_{.i}\right)^2$$

Tabelle 8.4 a: Quantile der F-Verteilung $F_{1-\alpha;\, FG_1, FG_2}$ für $\alpha = 0{,}01$

FG_2 / FG_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	4052.18	98.503	34.116	21.198	16.258	13.745	12.246	11.259	10.561	10.044	9.646	9.330	9.074	8.862	8.683	8.531	8.400	8.285	8.185
2	4999.50	99.000	30.817	18.000	13.274	10.925	9.547	8.649	8.022	7.559	7.206	6.927	6.701	6.515	6.359	6.226	6.112	6.013	5.926
3	5403.35	99.166	29.457	16.694	12.060	9.780	8.451	7.591	6.992	6.552	6.217	5.953	5.739	5.564	5.417	5.292	5.185	5.092	5.010
4	5624.58	99.249	28.710	15.977	11.392	9.148	7.847	7.006	6.422	5.994	5.668	5.412	5.205	5.035	4.893	4.773	4.669	4.579	4.500
5	5763.65	99.299	28.237	15.522	10.967	8.746	7.460	6.632	6.057	5.636	5.316	5.064	4.862	4.695	4.556	4.437	4.336	4.248	4.171
6	5858.99	99.333	27.911	15.207	10.672	8.466	7.191	6.371	5.802	5.386	5.069	4.821	4.620	4.456	4.318	4.202	4.102	4.015	3.939
7	5928.36	99.356	27.672	14.976	10.456	8.260	6.993	6.178	5.613	5.200	4.886	4.640	4.441	4.278	4.142	4.026	3.927	3.841	3.765
8	5981.07	99.374	27.489	14.799	10.289	8.102	6.840	6.029	5.467	5.057	4.744	4.499	4.302	4.140	4.004	3.890	3.791	3.705	3.631
9	6022.47	99.388	27.345	14.659	10.158	7.976	6.719	5.911	5.351	4.942	4.632	4.388	4.191	4.030	3.895	3.780	3.682	3.597	3.523
10	6055.85	99.399	27.229	14.546	10.051	7.874	6.620	5.814	5.257	4.849	4.539	4.296	4.100	3.939	3.805	3.691	3.593	3.508	3.434
11	6083.32	99.408	27.133	14.452	9.963	7.790	6.538	5.734	5.178	4.772	4.462	4.220	4.025	3.864	3.730	3.616	3.519	3.434	3.360
12	6106.32	99.416	27.052	14.374	9.888	7.718	6.469	5.667	5.111	4.706	4.397	4.155	3.960	3.800	3.666	3.553	3.455	3.371	3.297
13	6125.86	99.422	26.983	14.307	9.825	7.657	6.410	5.609	5.055	4.650	4.342	4.100	3.905	3.745	3.612	3.498	3.401	3.316	3.242
14	6142.67	99.428	26.924	14.249	9.770	7.605	6.359	5.559	5.005	4.601	4.293	4.052	3.857	3.698	3.564	3.451	3.353	3.269	3.195
15	6157.28	99.433	26.872	14.198	9.722	7.559	6.314	5.515	4.962	4.558	4.251	4.010	3.815	3.656	3.522	3.409	3.312	3.227	3.153
16	6170.10	99.437	26.827	14.154	9.680	7.519	6.275	5.477	4.924	4.520	4.213	3.972	3.778	3.619	3.485	3.372	3.275	3.190	3.116
17	6181.43	99.440	26.787	14.115	9.643	7.483	6.240	5.442	4.890	4.487	4.180	3.939	3.745	3.586	3.452	3.339	3.242	3.158	3.084
18	6191.53	99.444	26.751	14.080	9.610	7.451	6.209	5.412	4.860	4.457	4.150	3.909	3.716	3.556	3.423	3.310	3.212	3.128	3.054
19	6200.58	99.447	26.719	14.048	9.580	7.422	6.181	5.384	4.833	4.430	4.123	3.883	3.689	3.529	3.396	3.283	3.186	3.101	3.027
20	6208.73	99.449	26.690	14.020	9.553	7.396	6.155	5.359	4.808	4.405	4.099	3.858	3.665	3.505	3.372	3.259	3.162	3.077	3.003
21	6216.12	99.452	26.664	13.994	9.528	7.372	6.132	5.336	4.786	4.383	4.077	3.836	3.643	3.483	3.350	3.237	3.139	3.055	2.981
22	6222.84	99.454	26.640	13.970	9.506	7.351	6.111	5.316	4.765	4.363	4.057	3.816	3.622	3.463	3.330	3.216	3.119	3.035	2.961
23	6228.99	99.456	26.618	13.949	9.485	7.331	6.092	5.297	4.746	4.344	4.038	3.798	3.604	3.444	3.311	3.198	3.101	3.016	2.942
24	6234.63	99.458	26.598	13.929	9.466	7.313	6.074	5.279	4.729	4.327	4.021	3.780	3.587	3.427	3.294	3.181	3.084	2.999	2.925
25	6239.83	99.459	26.579	13.911	9.449	7.296	6.058	5.263	4.713	4.311	4.005	3.765	3.571	3.412	3.278	3.165	3.068	2.983	2.909
26	6244.62	99.461	26.562	13.894	9.433	7.280	6.043	5.248	4.698	4.296	3.990	3.750	3.556	3.397	3.264	3.150	3.053	2.968	2.894
27	6249.07	99.462	26.546	13.878	9.418	7.266	6.029	5.234	4.685	4.283	3.977	3.736	3.543	3.383	3.250	3.137	3.039	2.955	2.880
28	6253.20	99.463	26.531	13.864	9.404	7.253	6.016	5.221	4.672	4.270	3.964	3.724	3.530	3.371	3.237	3.124	3.026	2.942	2.868
29	6257.05	99.465	26.517	13.850	9.391	7.240	6.003	5.209	4.660	4.258	3.952	3.712	3.518	3.359	3.225	3.112	3.014	2.930	2.855
30	6260.65	99.466	26.505	13.838	9.379	7.229	5.992	5.198	4.649	4.247	3.941	3.701	3.507	3.348	3.214	3.101	3.003	2.919	2.844
40	6286.78	99.474	26.411	13.745	9.291	7.143	5.908	5.116	4.567	4.165	3.860	3.619	3.425	3.266	3.132	3.018	2.920	2.835	2.761
50	6302.52	99.479	26.354	13.690	9.238	7.091	5.858	5.065	4.517	4.115	3.810	3.569	3.375	3.215	3.081	2.967	2.869	2.784	2.709
60	6313.03	99.482	26.316	13.652	9.202	7.057	5.824	5.032	4.483	4.082	3.776	3.535	3.341	3.181	3.047	2.933	2.835	2.749	2.674
80	6326.20	99.487	26.269	13.605	9.157	7.013	5.781	4.989	4.441	4.039	3.734	3.493	3.298	3.138	3.004	2.889	2.791	2.705	2.630
100	6334.11	99.489	26.240	13.577	9.130	6.987	5.755	4.963	4.415	4.014	3.708	3.467	3.272	3.112	2.977	2.863	2.764	2.678	2.602
150	6344.68	99.492	26.202	13.539	9.094	6.951	5.720	4.929	4.380	3.979	3.673	3.432	3.237	3.076	2.942	2.827	2.728	2.641	2.565
200	6349.97	99.494	26.183	13.520	9.075	6.934	5.702	4.911	4.363	3.962	3.656	3.414	3.219	3.059	2.923	2.808	2.709	2.623	2.547
∞	6365.76	99.499	26.126	13.463	9.021	6.880	5.650	4.859	4.311	3.909	3.603	3.361	3.166	3.004	2.869	2.753	2.653	2.566	2.490

Tabelle 8.4 a: Quantile der F-Verteilung $F_{1-\alpha;\, FG_1,\, FG_2}$ für $\alpha = 0{,}01$

FG_1 \ FG_2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	80	100	150	200
1	8.096	8.017	7.945	7.881	7.823	7.770	7.721	7.677	7.636	7.598	7.562	7.314	7.171	7.077	6.963	6.895	6.807	6.763
2	5.849	5.780	5.719	5.664	5.614	5.568	5.526	5.488	5.453	5.420	5.390	5.179	5.057	4.977	4.881	4.824	4.749	4.713
3	4.938	4.874	4.817	4.765	4.718	4.675	4.637	4.601	4.568	4.538	4.510	4.313	4.199	4.126	4.036	3.984	3.915	3.881
4	4.431	4.369	4.313	4.264	4.218	4.177	4.140	4.106	4.074	4.045	4.018	3.828	3.720	3.649	3.563	3.513	3.447	3.414
5	4.103	4.042	3.988	3.939	3.895	3.855	3.818	3.785	3.754	3.725	3.699	3.514	3.408	3.339	3.255	3.206	3.142	3.110
6	3.871	3.812	3.758	3.710	3.667	3.627	3.591	3.558	3.528	3.499	3.473	3.291	3.186	3.119	3.036	2.988	2.924	2.893
7	3.699	3.640	3.587	3.539	3.496	3.457	3.421	3.388	3.358	3.330	3.304	3.124	3.020	2.953	2.871	2.823	2.761	2.730
8	3.564	3.506	3.453	3.406	3.363	3.324	3.288	3.256	3.226	3.198	3.173	2.993	2.890	2.823	2.742	2.694	2.632	2.601
9	3.457	3.398	3.346	3.299	3.256	3.217	3.182	3.149	3.120	3.092	3.067	2.888	2.785	2.718	2.637	2.590	2.528	2.497
10	3.368	3.310	3.258	3.211	3.168	3.129	3.094	3.062	3.032	3.005	2.979	2.801	2.698	2.632	2.551	2.503	2.441	2.411
11	3.294	3.236	3.184	3.137	3.094	3.056	3.021	2.988	2.959	2.931	2.906	2.727	2.625	2.559	2.478	2.430	2.368	2.338
12	3.231	3.173	3.121	3.074	3.032	2.993	2.958	2.926	2.896	2.868	2.843	2.665	2.562	2.496	2.415	2.368	2.305	2.275
13	3.177	3.119	3.067	3.020	2.977	2.939	2.904	2.871	2.842	2.814	2.789	2.611	2.508	2.442	2.361	2.313	2.251	2.220
14	3.130	3.072	3.019	2.973	2.930	2.892	2.857	2.824	2.795	2.767	2.742	2.563	2.461	2.394	2.313	2.265	2.203	2.172
15	3.088	3.030	2.978	2.931	2.889	2.850	2.815	2.783	2.753	2.726	2.700	2.522	2.419	2.352	2.271	2.223	2.160	2.129
16	3.051	2.993	2.941	2.894	2.852	2.813	2.778	2.746	2.716	2.689	2.663	2.484	2.382	2.315	2.233	2.185	2.122	2.091
17	3.018	2.960	2.908	2.861	2.819	2.780	2.745	2.713	2.683	2.656	2.630	2.451	2.348	2.281	2.199	2.151	2.088	2.057
18	2.989	2.931	2.879	2.832	2.789	2.751	2.715	2.683	2.653	2.626	2.600	2.421	2.318	2.251	2.169	2.120	2.057	2.026
19	2.962	2.904	2.852	2.805	2.762	2.724	2.688	2.656	2.626	2.599	2.573	2.394	2.290	2.223	2.141	2.092	2.029	1.997
20	2.938	2.880	2.827	2.781	2.738	2.699	2.664	2.632	2.602	2.574	2.549	2.369	2.265	2.198	2.115	2.067	2.003	1.971
21	2.916	2.857	2.805	2.758	2.716	2.677	2.642	2.609	2.579	2.552	2.526	2.346	2.242	2.175	2.092	2.043	1.979	1.947
22	2.895	2.837	2.785	2.738	2.695	2.657	2.621	2.589	2.559	2.531	2.506	2.325	2.221	2.153	2.070	2.021	1.957	1.925
23	2.877	2.818	2.766	2.719	2.676	2.638	2.602	2.570	2.540	2.512	2.487	2.306	2.202	2.134	2.050	2.001	1.937	1.905
24	2.859	2.801	2.749	2.702	2.659	2.620	2.585	2.552	2.522	2.495	2.469	2.288	2.183	2.115	2.032	1.983	1.918	1.886
25	2.843	2.785	2.733	2.686	2.643	2.604	2.569	2.536	2.506	2.478	2.453	2.271	2.167	2.098	2.015	1.965	1.900	1.868
26	2.829	2.770	2.718	2.671	2.628	2.589	2.554	2.521	2.491	2.463	2.437	2.256	2.151	2.083	1.999	1.949	1.884	1.851
27	2.815	2.756	2.704	2.657	2.614	2.575	2.540	2.507	2.477	2.449	2.423	2.241	2.136	2.068	1.983	1.934	1.868	1.836
28	2.802	2.743	2.691	2.644	2.601	2.562	2.526	2.494	2.464	2.436	2.410	2.228	2.123	2.054	1.969	1.919	1.854	1.821
29	2.790	2.731	2.679	2.632	2.589	2.550	2.514	2.481	2.451	2.423	2.398	2.215	2.110	2.041	1.956	1.906	1.840	1.807
30	2.778	2.720	2.667	2.620	2.577	2.538	2.503	2.470	2.440	2.412	2.386	2.203	2.098	2.028	1.944	1.893	1.827	1.794
40	2.695	2.636	2.583	2.535	2.492	2.453	2.417	2.384	2.354	2.325	2.299	2.114	2.007	1.936	1.849	1.797	1.729	1.694
50	2.643	2.584	2.531	2.483	2.440	2.400	2.364	2.330	2.300	2.271	2.245	2.058	1.949	1.877	1.788	1.735	1.665	1.629
60	2.608	2.548	2.495	2.447	2.403	2.364	2.327	2.294	2.263	2.234	2.208	2.019	1.909	1.836	1.746	1.692	1.620	1.583
80	2.563	2.503	2.450	2.401	2.357	2.317	2.281	2.247	2.216	2.187	2.160	1.969	1.857	1.783	1.690	1.634	1.559	1.521
100	2.535	2.475	2.422	2.373	2.329	2.289	2.252	2.218	2.187	2.158	2.131	1.938	1.825	1.749	1.655	1.598	1.520	1.481
150	2.498	2.438	2.384	2.335	2.291	2.250	2.213	2.179	2.147	2.118	2.091	1.896	1.780	1.703	1.605	1.546	1.465	1.423
200	2.479	2.419	2.365	2.316	2.271	2.230	2.193	2.159	2.127	2.097	2.070	1.874	1.757	1.678	1.579	1.518	1.435	1.391
∞	2.422	2.361	2.306	2.256	2.211	2.170	2.132	2.097	2.065	2.035	2.007	1.805	1.684	1.601	1.495	1.428	1.332	1.279

Fortsetzung

Tabelle 8.4 b: Quantile der F-Verteilung $F_{1-\alpha;\, FG_1, FG_2}$ für $\alpha = 0{,}05$

FG_1 \ FG_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	161.448	18.513	10.128	7.709	6.608	5.987	5.591	5.318	5.117	4.965	4.844	4.747	4.667	4.600	4.543	4.494	4.451	4.414	4.381
2	199.500	19.000	9.552	6.944	5.786	5.143	4.737	4.459	4.256	4.103	3.982	3.885	3.806	3.739	3.682	3.634	3.592	3.555	3.522
3	215.707	19.164	9.277	6.591	5.409	4.757	4.347	4.066	3.863	3.708	3.587	3.490	3.411	3.344	3.287	3.239	3.197	3.160	3.127
4	224.583	19.247	9.117	6.388	5.192	4.534	4.120	3.838	3.633	3.478	3.357	3.259	3.179	3.112	3.056	3.007	2.965	2.928	2.895
5	230.162	19.296	9.013	6.256	5.050	4.387	3.972	3.687	3.482	3.326	3.204	3.106	3.025	2.958	2.901	2.852	2.810	2.773	2.740
6	233.986	19.330	8.941	6.163	4.950	4.284	3.866	3.581	3.374	3.217	3.095	2.996	2.915	2.848	2.790	2.741	2.699	2.661	2.628
7	236.768	19.353	8.887	6.094	4.876	4.207	3.787	3.500	3.293	3.135	3.012	2.913	2.832	2.764	2.707	2.657	2.614	2.577	2.544
8	238.883	19.371	8.845	6.041	4.818	4.147	3.726	3.438	3.230	3.072	2.948	2.849	2.767	2.699	2.641	2.591	2.548	2.510	2.477
9	240.543	19.385	8.812	5.999	4.772	4.099	3.677	3.388	3.179	3.020	2.896	2.796	2.714	2.646	2.588	2.538	2.494	2.456	2.423
10	241.882	19.396	8.786	5.964	4.735	4.060	3.637	3.347	3.137	2.978	2.854	2.753	2.671	2.602	2.544	2.494	2.450	2.412	2.378
11	242.983	19.405	8.763	5.936	4.704	4.027	3.603	3.313	3.102	2.943	2.818	2.717	2.635	2.565	2.507	2.456	2.413	2.374	2.340
12	243.906	19.413	8.745	5.912	4.678	4.000	3.575	3.284	3.073	2.913	2.788	2.687	2.604	2.534	2.475	2.425	2.381	2.342	2.308
13	244.690	19.419	8.729	5.891	4.655	3.976	3.550	3.259	3.048	2.887	2.761	2.660	2.577	2.507	2.448	2.397	2.353	2.314	2.280
14	245.364	19.424	8.715	5.873	4.636	3.956	3.529	3.237	3.025	2.865	2.739	2.637	2.554	2.484	2.424	2.373	2.329	2.290	2.256
15	245.950	19.429	8.703	5.858	4.619	3.938	3.511	3.218	3.006	2.845	2.719	2.617	2.533	2.463	2.403	2.352	2.308	2.269	2.234
16	246.464	19.433	8.692	5.844	4.604	3.922	3.494	3.202	2.989	2.828	2.701	2.599	2.515	2.445	2.385	2.333	2.289	2.250	2.215
17	246.918	19.437	8.683	5.832	4.590	3.908	3.480	3.187	2.974	2.812	2.685	2.583	2.499	2.428	2.368	2.317	2.272	2.233	2.198
18	247.323	19.440	8.675	5.821	4.579	3.896	3.467	3.173	2.960	2.798	2.671	2.568	2.484	2.413	2.353	2.302	2.257	2.217	2.182
19	247.686	19.443	8.667	5.811	4.568	3.884	3.455	3.161	2.948	2.785	2.658	2.555	2.471	2.400	2.340	2.288	2.243	2.203	2.168
20	248.013	19.446	8.660	5.803	4.558	3.874	3.445	3.150	2.936	2.774	2.646	2.544	2.459	2.388	2.328	2.276	2.230	2.191	2.155
21	248.309	19.448	8.654	5.795	4.549	3.865	3.435	3.140	2.926	2.764	2.636	2.533	2.448	2.377	2.316	2.264	2.219	2.179	2.144
22	248.579	19.450	8.648	5.787	4.541	3.856	3.426	3.131	2.917	2.754	2.626	2.523	2.438	2.367	2.306	2.254	2.208	2.168	2.133
23	248.826	19.452	8.643	5.781	4.534	3.849	3.418	3.123	2.908	2.745	2.617	2.514	2.429	2.357	2.297	2.244	2.199	2.159	2.123
24	249.052	19.454	8.639	5.774	4.527	3.841	3.410	3.115	2.900	2.737	2.609	2.505	2.420	2.349	2.288	2.235	2.190	2.150	2.114
25	249.260	19.456	8.634	5.769	4.521	3.835	3.404	3.108	2.893	2.730	2.601	2.498	2.412	2.341	2.280	2.227	2.181	2.141	2.106
26	249.453	19.457	8.630	5.763	4.515	3.829	3.397	3.102	2.886	2.723	2.594	2.491	2.405	2.333	2.272	2.220	2.174	2.134	2.098
27	249.631	19.459	8.626	5.759	4.510	3.823	3.391	3.095	2.880	2.716	2.588	2.484	2.398	2.326	2.265	2.212	2.167	2.126	2.090
28	249.797	19.460	8.623	5.754	4.505	3.818	3.386	3.090	2.874	2.710	2.582	2.478	2.392	2.320	2.259	2.206	2.160	2.119	2.084
29	249.951	19.461	8.620	5.750	4.500	3.813	3.381	3.084	2.869	2.705	2.576	2.472	2.386	2.314	2.253	2.200	2.154	2.113	2.077
30	250.095	19.462	8.617	5.746	4.496	3.808	3.376	3.079	2.864	2.700	2.570	2.466	2.380	2.308	2.247	2.194	2.148	2.107	2.071
40	251.143	19.471	8.594	5.717	4.464	3.774	3.340	3.043	2.826	2.661	2.531	2.426	2.339	2.266	2.204	2.151	2.104	2.063	2.026
50	251.774	19.476	8.581	5.699	4.444	3.754	3.319	3.020	2.803	2.637	2.507	2.401	2.314	2.241	2.178	2.124	2.077	2.035	1.999
60	252.196	19.479	8.572	5.688	4.431	3.740	3.304	3.005	2.787	2.621	2.490	2.384	2.297	2.223	2.160	2.106	2.058	2.017	1.980
80	252.724	19.483	8.561	5.673	4.415	3.722	3.286	2.986	2.768	2.601	2.469	2.363	2.275	2.201	2.137	2.083	2.035	1.993	1.955
100	253.041	19.486	8.554	5.664	4.405	3.712	3.275	2.975	2.756	2.588	2.457	2.350	2.261	2.187	2.123	2.068	2.020	1.978	1.940
150	253.465	19.489	8.545	5.652	4.392	3.698	3.260	2.959	2.739	2.572	2.439	2.332	2.243	2.169	2.105	2.049	2.001	1.958	1.920
200	253.677	19.491	8.540	5.646	4.385	3.690	3.252	2.951	2.731	2.563	2.431	2.323	2.234	2.159	2.095	2.039	1.991	1.948	1.910
∞	254.310	19.496	8.527	5.628	4.365	3.669	3.230	2.928	2.707	2.538	2.405	2.296	2.207	2.131	2.066	2.010	1.961	1.917	1.878

Tabelle 8.4 b: Quantile der F-Verteilung $F_{1-\alpha;\,FG_1,FG_2}$ für $\alpha = 0{,}05$

FG_1 \ FG_2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	80	100	150	200
1	4.351	4.325	4.301	4.279	4.260	4.242	4.225	4.210	4.196	4.183	4.171	4.085	4.034	4.001	3.960	3.936	3.904	3.888
2	3.493	3.467	3.443	3.422	3.403	3.385	3.369	3.354	3.340	3.328	3.316	3.232	3.183	3.150	3.111	3.087	3.056	3.041
3	3.098	3.072	3.049	3.028	3.009	2.991	2.975	2.960	2.947	2.934	2.922	2.839	2.790	2.758	2.719	2.696	2.665	2.650
4	2.866	2.840	2.817	2.796	2.776	2.759	2.743	2.728	2.714	2.701	2.690	2.606	2.557	2.525	2.486	2.463	2.432	2.417
5	2.711	2.685	2.661	2.640	2.621	2.603	2.587	2.572	2.558	2.545	2.534	2.449	2.400	2.368	2.329	2.305	2.274	2.259
6	2.599	2.573	2.549	2.528	2.508	2.490	2.474	2.459	2.445	2.432	2.421	2.336	2.286	2.254	2.214	2.191	2.160	2.144
7	2.514	2.488	2.464	2.442	2.423	2.405	2.388	2.373	2.359	2.346	2.334	2.249	2.199	2.167	2.126	2.103	2.071	2.056
8	2.447	2.420	2.397	2.375	2.355	2.337	2.321	2.305	2.291	2.278	2.266	2.180	2.130	2.097	2.056	2.032	2.001	1.985
9	2.393	2.366	2.342	2.320	2.300	2.282	2.265	2.250	2.236	2.223	2.211	2.124	2.073	2.040	1.999	1.975	1.943	1.927
10	2.348	2.321	2.297	2.275	2.255	2.236	2.220	2.204	2.190	2.177	2.165	2.077	2.026	1.993	1.951	1.927	1.894	1.878
11	2.310	2.283	2.259	2.236	2.216	2.198	2.181	2.166	2.151	2.138	2.126	2.038	1.986	1.952	1.910	1.886	1.853	1.837
12	2.278	2.250	2.226	2.204	2.183	2.165	2.148	2.132	2.118	2.104	2.092	2.003	1.952	1.917	1.875	1.850	1.817	1.801
13	2.250	2.222	2.198	2.175	2.155	2.136	2.119	2.103	2.089	2.075	2.063	1.974	1.921	1.887	1.845	1.819	1.786	1.769
14	2.225	2.197	2.173	2.150	2.130	2.111	2.094	2.078	2.064	2.050	2.037	1.948	1.895	1.860	1.817	1.792	1.758	1.742
15	2.203	2.176	2.151	2.128	2.108	2.089	2.072	2.056	2.041	2.027	2.015	1.924	1.871	1.836	1.793	1.768	1.734	1.717
16	2.184	2.156	2.131	2.109	2.088	2.069	2.052	2.036	2.021	2.007	1.995	1.904	1.850	1.815	1.772	1.746	1.711	1.694
17	2.167	2.139	2.114	2.091	2.070	2.051	2.034	2.018	2.003	1.989	1.976	1.885	1.831	1.796	1.752	1.726	1.691	1.674
18	2.151	2.123	2.098	2.075	2.054	2.035	2.018	2.002	1.987	1.973	1.960	1.868	1.814	1.778	1.734	1.708	1.673	1.656
19	2.137	2.109	2.084	2.061	2.040	2.021	2.003	1.987	1.972	1.958	1.945	1.853	1.798	1.763	1.718	1.691	1.656	1.639
20	2.124	2.096	2.071	2.048	2.027	2.007	1.990	1.974	1.959	1.945	1.932	1.839	1.784	1.748	1.703	1.676	1.641	1.623
21	2.112	2.084	2.059	2.036	2.015	1.995	1.978	1.961	1.946	1.932	1.919	1.826	1.771	1.735	1.689	1.663	1.627	1.609
22	2.102	2.073	2.048	2.025	2.003	1.984	1.966	1.950	1.935	1.921	1.908	1.814	1.759	1.722	1.677	1.650	1.614	1.596
23	2.092	2.063	2.038	2.014	1.993	1.974	1.956	1.940	1.924	1.910	1.897	1.803	1.748	1.711	1.665	1.638	1.602	1.583
24	2.082	2.054	2.028	2.005	1.984	1.964	1.946	1.930	1.915	1.901	1.887	1.793	1.737	1.700	1.654	1.627	1.590	1.572
25	2.074	2.045	2.020	1.996	1.975	1.955	1.938	1.921	1.906	1.891	1.878	1.783	1.727	1.690	1.644	1.616	1.580	1.561
26	2.066	2.037	2.012	1.988	1.967	1.947	1.929	1.913	1.897	1.883	1.870	1.775	1.718	1.681	1.634	1.607	1.570	1.551
27	2.059	2.030	2.004	1.981	1.959	1.939	1.921	1.905	1.889	1.875	1.862	1.766	1.710	1.672	1.626	1.598	1.560	1.542
28	2.052	2.023	1.997	1.973	1.952	1.932	1.914	1.898	1.882	1.868	1.854	1.759	1.702	1.664	1.617	1.589	1.552	1.533
29	2.045	2.016	1.990	1.967	1.945	1.926	1.907	1.891	1.875	1.861	1.847	1.751	1.694	1.656	1.609	1.581	1.543	1.524
30	2.039	2.010	1.984	1.961	1.939	1.919	1.901	1.884	1.869	1.854	1.841	1.744	1.687	1.649	1.602	1.573	1.535	1.516
40	1.994	1.965	1.938	1.914	1.892	1.872	1.853	1.836	1.820	1.806	1.792	1.693	1.634	1.594	1.545	1.515	1.475	1.455
50	1.966	1.936	1.909	1.885	1.863	1.842	1.823	1.806	1.790	1.775	1.761	1.660	1.599	1.559	1.508	1.477	1.436	1.415
60	1.946	1.916	1.889	1.865	1.842	1.822	1.803	1.785	1.769	1.754	1.740	1.637	1.576	1.534	1.482	1.450	1.407	1.386
80	1.922	1.891	1.864	1.839	1.816	1.796	1.776	1.758	1.742	1.726	1.712	1.608	1.544	1.502	1.448	1.415	1.369	1.346
100	1.907	1.876	1.849	1.823	1.800	1.779	1.760	1.742	1.725	1.710	1.695	1.589	1.525	1.481	1.426	1.392	1.345	1.321
150	1.886	1.855	1.827	1.802	1.779	1.757	1.738	1.719	1.702	1.686	1.672	1.564	1.498	1.453	1.395	1.359	1.309	1.283
200	1.875	1.845	1.817	1.791	1.768	1.746	1.726	1.708	1.691	1.675	1.660	1.551	1.484	1.438	1.379	1.342	1.290	1.263
∞	1.843	1.812	1.783	1.757	1.733	1.711	1.691	1.672	1.654	1.638	1.623	1.509	1.439	1.390	1.325	1.284	1.223	1.189

Fortsetzung

Tabelle 8.4 c: Quantile der F-Verteilung $F_{1-\alpha;\, FG_1, FG_2}$ für $\alpha = 0{,}10$

FG_2 / FG_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	39.863	8.526	5.538	4.545	4.060	3.776	3.589	3.458	3.360	3.285	3.225	3.177	3.136	3.102	3.073	3.048	3.026	3.007	2.990
2	49.500	9.000	5.462	4.325	3.780	3.463	3.257	3.113	3.006	2.924	2.860	2.807	2.763	2.726	2.695	2.668	2.645	2.624	2.606
3	53.593	9.162	5.391	4.191	3.619	3.289	3.074	2.924	2.813	2.728	2.660	2.606	2.560	2.522	2.490	2.462	2.437	2.416	2.397
4	55.833	9.243	5.343	4.107	3.520	3.181	2.961	2.806	2.693	2.605	2.536	2.480	2.434	2.395	2.361	2.333	2.308	2.286	2.266
5	57.240	9.293	5.309	4.051	3.453	3.108	2.883	2.726	2.611	2.522	2.451	2.394	2.347	2.307	2.273	2.244	2.218	2.196	2.176
6	58.204	9.326	5.285	4.010	3.405	3.055	2.827	2.668	2.551	2.461	2.389	2.331	2.283	2.243	2.208	2.178	2.152	2.130	2.109
7	58.906	9.349	5.266	3.979	3.368	3.014	2.785	2.624	2.505	2.414	2.342	2.283	2.234	2.193	2.158	2.128	2.102	2.079	2.058
8	59.439	9.367	5.252	3.955	3.339	2.983	2.752	2.589	2.469	2.377	2.304	2.245	2.195	2.154	2.119	2.088	2.061	2.038	2.017
9	59.858	9.381	5.240	3.936	3.316	2.958	2.725	2.561	2.440	2.347	2.274	2.214	2.164	2.122	2.086	2.055	2.028	2.005	1.984
10	60.195	9.392	5.230	3.920	3.297	2.937	2.703	2.538	2.416	2.323	2.248	2.188	2.138	2.095	2.059	2.028	2.001	1.977	1.956
11	60.473	9.401	5.222	3.907	3.282	2.920	2.684	2.519	2.396	2.302	2.227	2.166	2.116	2.073	2.037	2.005	1.978	1.954	1.932
12	60.705	9.408	5.216	3.896	3.268	2.905	2.668	2.502	2.379	2.284	2.209	2.147	2.097	2.054	2.017	1.985	1.958	1.933	1.912
13	60.903	9.415	5.210	3.886	3.257	2.892	2.654	2.488	2.364	2.269	2.193	2.131	2.080	2.037	2.000	1.968	1.940	1.916	1.894
14	61.073	9.420	5.205	3.878	3.247	2.881	2.643	2.475	2.351	2.255	2.179	2.117	2.066	2.022	1.985	1.953	1.925	1.900	1.878
15	61.220	9.425	5.200	3.870	3.238	2.871	2.632	2.464	2.340	2.244	2.167	2.105	2.053	2.010	1.972	1.940	1.912	1.887	1.865
16	61.350	9.429	5.196	3.864	3.230	2.863	2.623	2.455	2.329	2.233	2.156	2.094	2.042	1.998	1.961	1.928	1.900	1.875	1.852
17	61.464	9.433	5.193	3.858	3.223	2.855	2.615	2.446	2.320	2.224	2.147	2.084	2.032	1.988	1.950	1.917	1.889	1.864	1.841
18	61.566	9.436	5.190	3.853	3.217	2.848	2.607	2.438	2.312	2.215	2.138	2.075	2.023	1.978	1.941	1.908	1.879	1.854	1.831
19	61.658	9.439	5.187	3.849	3.212	2.842	2.601	2.431	2.305	2.208	2.130	2.067	2.014	1.970	1.932	1.899	1.870	1.845	1.822
20	61.740	9.441	5.184	3.844	3.207	2.836	2.595	2.425	2.298	2.201	2.123	2.060	2.007	1.962	1.924	1.891	1.862	1.837	1.814
21	61.815	9.444	5.182	3.841	3.202	2.831	2.589	2.419	2.292	2.194	2.117	2.053	2.000	1.955	1.917	1.884	1.855	1.829	1.807
22	61.883	9.446	5.180	3.837	3.198	2.827	2.584	2.413	2.287	2.189	2.111	2.047	1.994	1.949	1.911	1.877	1.848	1.823	1.800
23	61.945	9.448	5.178	3.834	3.194	2.822	2.580	2.409	2.282	2.183	2.105	2.041	1.988	1.943	1.905	1.871	1.842	1.816	1.793
24	62.002	9.450	5.176	3.831	3.191	2.818	2.575	2.404	2.277	2.178	2.100	2.036	1.983	1.938	1.899	1.866	1.836	1.810	1.787
25	62.055	9.451	5.175	3.828	3.187	2.815	2.571	2.400	2.272	2.174	2.095	2.031	1.978	1.933	1.894	1.860	1.831	1.805	1.782
26	62.103	9.453	5.173	3.826	3.184	2.811	2.568	2.396	2.268	2.170	2.091	2.027	1.973	1.928	1.889	1.855	1.826	1.800	1.777
27	62.148	9.454	5.172	3.823	3.181	2.808	2.564	2.392	2.265	2.166	2.087	2.022	1.969	1.923	1.885	1.851	1.821	1.795	1.772
28	62.190	9.456	5.170	3.821	3.179	2.805	2.561	2.389	2.261	2.162	2.083	2.019	1.965	1.919	1.880	1.847	1.817	1.791	1.767
29	62.229	9.457	5.169	3.819	3.176	2.803	2.558	2.386	2.258	2.159	2.080	2.015	1.961	1.916	1.876	1.843	1.813	1.787	1.763
30	62.265	9.458	5.168	3.817	3.174	2.800	2.555	2.383	2.255	2.155	2.076	2.011	1.958	1.912	1.873	1.839	1.809	1.783	1.759
40	62.529	9.466	5.160	3.804	3.157	2.781	2.535	2.361	2.232	2.132	2.052	1.986	1.931	1.885	1.845	1.811	1.781	1.754	1.730
50	62.688	9.471	5.155	3.795	3.147	2.770	2.523	2.348	2.218	2.117	2.036	1.970	1.915	1.869	1.828	1.793	1.763	1.736	1.711
60	62.794	9.475	5.151	3.790	3.140	2.762	2.514	2.339	2.208	2.107	2.026	1.960	1.904	1.857	1.817	1.782	1.751	1.723	1.699
80	62.927	9.479	5.147	3.782	3.132	2.752	2.504	2.328	2.196	2.095	2.013	1.946	1.890	1.843	1.802	1.766	1.735	1.707	1.683
100	63.007	9.481	5.144	3.778	3.126	2.746	2.497	2.321	2.189	2.087	2.005	1.938	1.882	1.834	1.793	1.757	1.726	1.698	1.673
150	63.114	9.485	5.141	3.772	3.119	2.738	2.488	2.312	2.179	2.077	1.994	1.927	1.870	1.822	1.781	1.744	1.713	1.684	1.659
200	63.167	9.486	5.139	3.769	3.116	2.734	2.484	2.307	2.174	2.071	1.989	1.921	1.864	1.816	1.774	1.738	1.706	1.678	1.652
∞	63.327	9.491	5.134	3.761	3.105	2.722	2.471	2.293	2.159	2.056	1.972	1.904	1.846	1.797	1.755	1.718	1.686	1.657	1.631

Tabelle 8.4 c: Quantile der F-Verteilung $F_{1-\alpha;\,FG_1,FG_2}$ für $\alpha = 0{,}10$

FG_1 \ FG_2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	80	100	150	200
1	2.975	2.961	2.949	2.937	2.927	2.918	2.909	2.901	2.894	2.887	2.881	2.835	2.809	2.791	2.769	2.756	2.739	2.731
2	2.589	2.575	2.561	2.549	2.538	2.528	2.519	2.511	2.503	2.495	2.489	2.440	2.412	2.393	2.370	2.356	2.338	2.329
3	2.380	2.365	2.351	2.339	2.327	2.317	2.307	2.299	2.291	2.283	2.276	2.226	2.197	2.177	2.154	2.139	2.121	2.111
4	2.249	2.233	2.219	2.207	2.195	2.184	2.174	2.165	2.157	2.149	2.142	2.091	2.061	2.041	2.016	2.002	1.983	1.973
5	2.158	2.142	2.128	2.115	2.103	2.092	2.082	2.073	2.064	2.057	2.049	1.997	1.966	1.946	1.921	1.906	1.886	1.876
6	2.091	2.075	2.060	2.047	2.035	2.024	2.014	2.005	1.996	1.988	1.980	1.927	1.895	1.875	1.849	1.834	1.814	1.804
7	2.040	2.023	2.008	1.995	1.983	1.971	1.961	1.952	1.943	1.935	1.927	1.873	1.840	1.819	1.793	1.778	1.757	1.747
8	1.999	1.982	1.967	1.953	1.941	1.929	1.919	1.909	1.900	1.892	1.884	1.829	1.796	1.775	1.748	1.732	1.712	1.701
9	1.965	1.948	1.933	1.919	1.906	1.895	1.884	1.874	1.865	1.857	1.849	1.793	1.760	1.738	1.711	1.695	1.674	1.663
10	1.937	1.920	1.904	1.890	1.877	1.866	1.855	1.845	1.836	1.827	1.819	1.763	1.729	1.707	1.680	1.663	1.642	1.631
11	1.913	1.896	1.880	1.866	1.853	1.841	1.830	1.820	1.811	1.802	1.794	1.737	1.703	1.680	1.653	1.636	1.614	1.603
12	1.892	1.875	1.859	1.845	1.832	1.820	1.809	1.799	1.790	1.781	1.773	1.715	1.680	1.657	1.629	1.612	1.590	1.579
13	1.875	1.857	1.841	1.827	1.814	1.802	1.790	1.780	1.771	1.762	1.754	1.695	1.660	1.637	1.609	1.592	1.569	1.558
14	1.859	1.841	1.825	1.811	1.797	1.785	1.774	1.764	1.754	1.745	1.737	1.678	1.643	1.619	1.590	1.573	1.550	1.539
15	1.845	1.827	1.811	1.796	1.783	1.771	1.760	1.749	1.740	1.731	1.722	1.662	1.627	1.603	1.574	1.557	1.533	1.522
16	1.833	1.815	1.798	1.784	1.770	1.758	1.747	1.736	1.726	1.717	1.709	1.649	1.613	1.589	1.559	1.542	1.518	1.507
17	1.821	1.803	1.787	1.772	1.759	1.746	1.735	1.724	1.715	1.705	1.697	1.636	1.600	1.576	1.546	1.528	1.504	1.493
18	1.811	1.793	1.777	1.762	1.748	1.736	1.724	1.714	1.704	1.695	1.686	1.625	1.588	1.564	1.534	1.516	1.492	1.480
19	1.802	1.784	1.768	1.753	1.739	1.726	1.715	1.704	1.694	1.685	1.676	1.615	1.578	1.553	1.523	1.505	1.480	1.468
20	1.794	1.776	1.759	1.744	1.730	1.718	1.706	1.695	1.685	1.676	1.667	1.605	1.568	1.543	1.513	1.494	1.470	1.458
21	1.786	1.768	1.751	1.736	1.722	1.710	1.698	1.687	1.677	1.668	1.659	1.596	1.559	1.534	1.503	1.485	1.460	1.448
22	1.779	1.761	1.744	1.729	1.715	1.702	1.690	1.680	1.669	1.660	1.651	1.588	1.551	1.526	1.495	1.476	1.451	1.438
23	1.773	1.754	1.737	1.722	1.708	1.695	1.683	1.673	1.662	1.653	1.644	1.581	1.543	1.518	1.487	1.468	1.442	1.430
24	1.767	1.748	1.731	1.716	1.702	1.689	1.677	1.666	1.656	1.647	1.638	1.574	1.536	1.511	1.479	1.460	1.434	1.422
25	1.761	1.742	1.726	1.710	1.696	1.683	1.671	1.660	1.650	1.640	1.632	1.568	1.529	1.504	1.472	1.453	1.427	1.414
26	1.756	1.737	1.720	1.705	1.691	1.678	1.666	1.655	1.644	1.635	1.626	1.562	1.523	1.498	1.465	1.446	1.420	1.407
27	1.751	1.732	1.715	1.700	1.686	1.672	1.660	1.649	1.639	1.630	1.621	1.556	1.517	1.492	1.459	1.440	1.414	1.400
28	1.746	1.728	1.711	1.695	1.681	1.668	1.656	1.645	1.634	1.625	1.616	1.551	1.512	1.486	1.453	1.434	1.407	1.394
29	1.742	1.723	1.706	1.691	1.676	1.663	1.651	1.640	1.630	1.620	1.611	1.546	1.507	1.481	1.448	1.428	1.402	1.388
30	1.738	1.719	1.702	1.686	1.672	1.659	1.647	1.636	1.625	1.616	1.606	1.541	1.502	1.476	1.443	1.423	1.396	1.383
40	1.708	1.689	1.671	1.655	1.641	1.627	1.615	1.603	1.592	1.583	1.573	1.506	1.465	1.437	1.403	1.382	1.353	1.339
50	1.690	1.670	1.652	1.636	1.621	1.607	1.594	1.583	1.572	1.562	1.552	1.483	1.441	1.413	1.377	1.355	1.325	1.310
60	1.677	1.657	1.639	1.622	1.607	1.593	1.581	1.569	1.558	1.547	1.538	1.467	1.424	1.395	1.358	1.336	1.305	1.289
80	1.660	1.640	1.622	1.605	1.590	1.576	1.562	1.550	1.539	1.529	1.519	1.447	1.402	1.372	1.334	1.310	1.277	1.261
100	1.650	1.630	1.611	1.594	1.579	1.565	1.551	1.539	1.528	1.517	1.507	1.434	1.388	1.358	1.318	1.293	1.259	1.242
150	1.636	1.616	1.597	1.580	1.564	1.549	1.536	1.523	1.512	1.501	1.491	1.416	1.369	1.337	1.296	1.270	1.233	1.214
200	1.629	1.608	1.590	1.572	1.556	1.542	1.528	1.515	1.504	1.493	1.482	1.406	1.359	1.326	1.284	1.257	1.219	1.199
∞	1.608	1.586	1.567	1.549	1.533	1.518	1.504	1.491	1.479	1.467	1.457	1.377	1.327	1.292	1.245	1.215	1.170	1.144

Fortsetzung

Mit $F = \frac{s_A^2}{s_{Rest}^2} = \frac{28{,}149}{6{,}092} = 4{,}62$

lautet die Varianztabelle nunmehr

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F
gesamt	23	144,2250		
zwischen den Faktorstufen (Faktor A)	2	56,2975	28,149	4,62
innerhalb der Faktorstufen (Rest)	21	127,9275	6,092	

Für $\alpha = 0.05$, $FG_A = 2$ und $FG_{Rest} = 21$ ist der zu vergleichende Wert $F_{1-\alpha;2,21} = 3{,}467$.
Es wird aus der Tabelle 8.4[11] der F-Wert abgelesen. Zeilenweise sind die Freiheitsgrade des Faktors $FG_1 = FG_A$ (die der kleineren Varianz) und spaltenweise die des Restes $FG_2 = FG_{Rest}$ (die der größeren Varianz) angegeben.

Da $F = 4{,}62 > 3{,}467 = F_{1-\alpha;2,21}$ muß die Nullhypothese verworfen werden. Die drei Applikationsverfahren unterscheiden sich in ihrer mittleren Wirkung signifikant.

Ein kurzer Exkurs ist noch notwendig, um anhand der Erwartungswerte der Varianzen anstelle deren Schätzungen die theoretischen Grundlagen noch einmal aufzuzeigen. Dazu soll nachstehende Tabelle dienen.

Varianzursache	Freiheitsgrade FG	Summe der Abweichungsquadrate SQ	mittlere quadratische Abweichung MQ	Testgröße F	erwartete mittlere quadratische Abweichung E(MQ)
gesamt	N - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2$			
Faktor A	a - 1	$\sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\frac{MQ_A}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2 + \frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a} n_i(\mu_i - \mu)^2$
Rest	N - a	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$		σ^2

$$N = \sum_i n_i$$

[11] SAS-Programm für die Quantile der F-Verteilung ($\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$):

```
proc iml;
  fg = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,
       21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,40,50,60,80,100,150,200,32000};
  start f_tab;
    f  = j(38,38,1);
    do i = 1 to 38;
      do j = 1 to 38;
        f[i,j]=finv(1-alpha,fg[i],fg[j]);
      end;
    end;
    fgc = char(fg);
    print alpha, f [format=7.3 rowname=fgc colname=fgc];
  finish;
  alpha = 0.01;
  run f_tab;
  alpha = 0.05;
  run f_tab;
  alpha = 0.1;
  run f_tab;
quit;
```

Bei Gleichheit der Mittelwerte ist der Term $\frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a} n_i(\mu_i-\mu)^2$ gleich Null. Mit Größerwerden dieses Terms, der vor allem durch die Abweichung des erwarteten Effektes der i-ten Stufe des Prüffaktors vom Erwartungswert des Versuches bestimmt wird, wächst die Testgröße F.
Die Schätzung für die unbekannte Varianz des einfaktoriellen Modells ist erwartungstreu.

Natürlich kann die Varianzanalyse auch herangezogen werden, wenn der Prüffaktor nur zwei Stufen hat. Das Ergebnis entspricht dem des t-Testes. Das es hier einen Zusammenhang gibt, zeigt ein Blick auf die t-Quantile (Tabelle 5.4) und die F-Quantile (Tabelle 8.4). Auszugsweise werden nur die Spalte bzw. Zeile für $\alpha = 0.05$ betrachtet:

t-Quantile

FG	$\alpha = 0.05$
1	12.706
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
•••	•••

F-Quantile $\alpha = 0.05$

FG_1 \ FG_2	1	2	3	4	5	•••
1	161.448	18.513	10.128	7.709	6.608	•••

Es gilt:

$$F^2_{1-\alpha;\,1,FG_2} = t_{1-\alpha;\,FG_2} \quad .$$

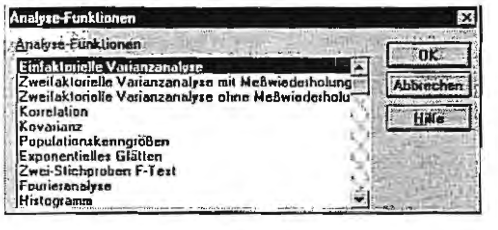
EXCEL

Für die Durchführung der Varianzanalyse mit Hilfe von EXCEL werden erweiterte Auswertungsmöglichkeiten benötigt, die der Add-In-Manager bereitstellt. Sollte im Pull-Down-Menü Extras die Wahlmöglichkeit Analyse-Funktionen nicht vorhanden sein, dann wird der Add-In-Manager durch Anklicken aufgerufen. Im sich öffnenden Fenster werden die Analyse-Funktionen ausgewählt. Damit stehen sie zur Verfügung.

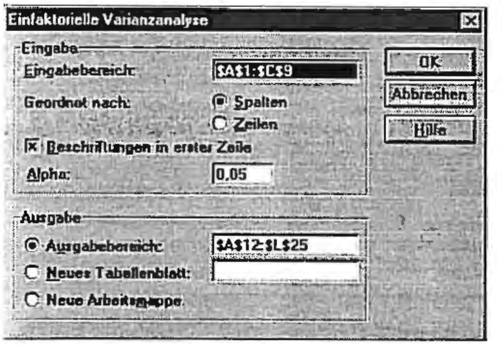
Die Daten sind in ein EXCEL-Arbeitsblatt eingetragen:

	A	B	C
1	Spritzen	Sprühen	Feinsprühen
2	8	14,8	18,2
3	11,4	10,4	18,7
4	8,6	12	14
5	15	16,9	14,9
6	16,9	14,3	15
7	11,9	13,4	15,8
8	10,6	14,9	15,7
9	12,4	10,8	12,4

Nun wird im Pull-Down-Menü Extras die Wahlmöglichkeit Analyse-Funktionen
und dort die Einfaktorielle Varianzanalyse ausgewählt.



Der Eingabebereich wird markiert. Werden die Spaltenbeschriftungen miterfaßt, dann sollte auch die Möglichkeit der Beschriftung der ersten Zeile genutzt werden. Der Wert für die Irrtumswahrscheinlichkeit α kann verändert werden.
Wichtig ist die Angabe eines hinreichend großen Ausgabebereiche, der die Varianztabelle aufnimmt.



Das Ergebnis lautet:

Anova: Einfaktorielle Varianzanalyse

ZUSAMMENFASSUNG

Gruppen	*Anzahl*	*Summe*	*Mittelwert*	*Varianz*
Spritzen	8	94,8	11,85	8,982857143
Sprühen	8	107,5	13,4375	4,996964286
Feinsprühen	8	124,7	15,5875	4,295535714

ANOVA

Streuungsursache	*Quadratsummen (SS)*	*Freiheitsgrade (df)*	*Mittlere Quadratsumme (MS)*	*Prüfgröße (F)*	*P-Wert*	*kritischer F-Wert*
Unterschiede zwischen den Gruppen	56,2975	2	28,14875	4,620771531	0,02172507	3,466794851
Innerhalb der Gruppen	127,9275	21	6,091785714			
Gesamt	184,225	23				

Das bedeutet, daß sich die drei Verfahren in ihrer mittleren Wirkung signifikant unterscheiden. Beachtet werden sollten die ausgegebenen Mittelwerte und Varianzen (Varianzhomogenität!) der Faktorstufen.

SAS

Eine sehr mächtige Prozedur ist GLM.

```
data bsp81;
  input v1-v3;
  appl = 'Spritzen';  masse= v1;  output;
  appl = 'Sprühen ';  masse= v2;  output;
  appl = 'FSprühen';  masse= v3;  output;
cards;
 8.0  14.8  18.2
11.4  10.4  18.7
 8.6  12.0  14.0
15.0  16.9  14.9
16.9  14.3  15.0
11.9  13.4  15.8
10.6  14.9  15.7
12.4  10.8  12.4
;
proc glm;
  class appl;
  model masse = appl/ SS3;
  means appl;
run;
```

Prüffaktor (Klassifikationsvariable): appl
Prüfmerkmal: masse

allgemein: Prüfmerkmal = Prüffaktor(en)
[SAS kennt mehrerer Typen der Quadratsummenzerlegung, von denen der Typ III (Option SS3) zu empfehlen ist]

Das Ergebnis lautet:

```
General Linear Models Procedure                                               ①
Class Level Information

Class     Levels    Values
APPL           3    FSprühen Spritzen Sprühen

Number of observations in data set = 24


General Linear Models Procedure                                               ②
Dependent Variable: MASSE

Source              DF    Sum of Squares    Mean Square    F Value    Pr > F   ❶
Model                2       56.29750000    28.14875000       4.62    0.0217
Error               21      127.92750000     6.09178571
Corrected Total     23      184.22500000

         R-Square            C.V.             Root MSE       MASSE Mean        ❷
         0.305591        18.11489           2.46815431      13.62500000

Source              DF       Type III SS    Mean Square    F Value    Pr > F   ❸
APPL                 2      56.29750000     28.14875000       4.62    0.0217


General Linear Models Procedure                                               ③

Level of          ------------MASSE------------
APPL         N       Mean                SD

FSprühen     8     15.5875000         2.07256742
Spritzen     8     11.8500000         2.99714150
Sprühen      8     13.4375000         2.23538907
```

Zum besseren Verständnis wurde obige Ausgabe in drei Abschnitte ①, ② und ③ unterteilt. Der erste Abschnitt enthält allgemeine Informationen über den betrachteten Faktor (APPL), die Anzahl der Stufen und deren Bezeichnung, sowie die Gesamtanzahl der Beobachtungen.
Im Abschnitt ② wird die Varianztabelle ausgegeben. Sie erscheint im Teil ❶ für die Varianzursachen Modell, Rest und Gesamt in der bekannten Form. Im Teil ❸ wird das Modell mit Hilfe des Typs III der Quadratsummenzerlegung weiter aufgesplittet. Da für die hier betrachtete einfaktorielle Varianzanalyse das Modell nur aus einem Faktor besteht, entsprechen die Werte den im Teil ❶ aufgeführten.
Der F-Test weist anhand der ausgegebenen Überschreitungswahrscheinlichkeit (`Pr > F : 0.0217`), die kleiner ist als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α, signifikante Unterschiede aus. Die Nullhypothese muß abgelehnt werden, d. h. mindestens einer der Mittelwerte unterscheidet sich signifikant von den anderen.
Im Teil ❷ findet man verschiedene Maßzahlen: das Bestimmtheitsmaß (`R-Square`), den Variationskoeffizienten (`C.V.`), die Quadratwurzel aus der Restvarianz (`Root MSE`) und den Versuchsmittelwert des Merkmals (`Mean`).
Den Abschnitt ③ bewirkt die Programmzeile `means appl;` . Die Mittelwerte (`Mean`) und Standardabweichungen (`SD`) der einzelnen Faktorstufen sollten ausgegeben werden, weil sie einen Blick auf die zu vergleichenden Mittelwerte und die Variabilitäten gestatten.

8.2.2.1 Wie kann die Varianzhomogenität geprüft werden?

Ein Blick auf die mit Hilfe der Programmzeile `means appl;` ausgegebenen Standardabweichungen kann nicht schaden: er liefert einen Eindruck von der Variabilität der Stichproben.
Ab der Version SAS 6.12 stehen mehrere Tests zur Prüfung auf Varianzhomogenität zur Verfügung. Hier vorgestellt und empfohlen werden soll der Levene-Test.

Für das einfaktorielle Modell stehen zwei Typen zur Auswahl, die sich in der Zufallsvariable $\underline{z}_{ij}$ unterscheiden:

`type=abs`

$$z_{ij} = \left|y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right| \qquad (i=1, 2, ..., a\,;\, j=1, 2, ..., n_i)$$

`type=square`

$$z_{ij} = \left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 \qquad (i=1, 2, ..., a\,;\, j=1, 2, ..., n_i)$$

Die F-verteilte Testgröße ist definiert

$$F = \frac{\frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a} n_i\left(\bar{z}_{i\bullet} - \bar{z}_{\bullet\bullet}\right)^2}{\frac{1}{N-a}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left(z_{ij} - \bar{z}_{i\bullet}\right)^2}$$

Für die Daten des Beispiels 8.1 wird die Testgröße mit den absolut gebildeten Werten berechnet.

Die a = 3 Mittelwerte sind: 11,8500 13,4375 15,5875

Die jeweiligen Differenzen zu diesen Mittelwerten lauten:

	$z_{1j} = \left\|y_{1j} - \bar{y}_{1\bullet}\right\|$	$z_{2j} = \left\|y_{2j} - \bar{y}_{2\bullet}\right\|$	$z_{3j} = \left\|y_{3j} - \bar{y}_{3\bullet}\right\|$
	3,850	1,363	2,613
	0,450	3,038	3,113
	3,250	1,438	1,588
	3,150	3,463	0,688
	5,050	0,862	0,588
	0,050	0,038	0,213
	1,250	1,463	0,112
	0,550	2,638	3,188
$\bar{z}_{i\bullet}$ =	2,200	1,788	1,513

$\bar{z}_{\bullet\bullet}$ = 1,833

Der Divident der Testgröße ist 0,9579.
Die Quadrate, deren Summe für die Berechnung des Divisors benötigt werden, sind:

$\left(z_{1j} - \bar{z}_{1\bullet}\right)^2$	$\left(z_{2j} - \bar{z}_{2\bullet}\right)^2$	$\left(z_{3j} - \bar{z}_{3\bullet}\right)^2$
2,723	0,181	1,210
3,063	1,563	2,560
1,103	0,122	0,006
0,903	2,806	0,681
8,123	0,856	0,856
4,623	3,062	1,690
0,903	0,106	1,960
2,723	0,723	2,806

Die Summe dieser Quadrate hat den Wert 45,345. Folglich ergibt sich die Testgröße mit

$$F = \frac{0{,}9579}{45{,}345\,/\,(24-3)} = 0{,}44363\,.$$

Dieser Wert wird mit dem F-Quantil $F_{1-\alpha;2,21}$ = 3,467 (Tab. 8.4 b) verglichen: keine singnifikanten Unterschiede → es liegt keine Varianzinhomogenität vor.

Die Testgröße mit den quadratisch gebildeten Werten z_{ij} wird analog berechnet.

Die Realisierung in SAS erfolgt durch Erweiterung der Programmzeile

`means appl / hovtest=` *Test zur Varianzhomogenität* ;

```
proc glm;
  class appl;
  model masse = appl/ SS3;
  means appl/hovtest=levene (type=abs);
run;
```

```
proc glm;
  class appl;
  model masse = appl/ SS3;
  means appl/hovtest=levene (type=square);
run;
```

In der Ausgabe folgt der Varianztabelle:

```
General Linear Models Procedure

Levene's Test for Equality of MASSE Variance
ANOVA of Absolute Deviations from Group Means

              Sum of     Mean
Source DF    Squares   Square   F Value   Pr > F
APPL    2     1.9158   0.9579    0.4436   0.6476
Error  21    45.3450   2.1593

General Linear Models Procedure

Level of       ------------MASSE------------
APPL       N      Mean                SD
FSprühen   8    15.5875000       2.07256742
Spritzen   8    11.8500000       2.99714150
Sprühen    8    13.4375000       2.23538907
```

```
General Linear Models Procedure

Levene's Test for Equality of MASSE Variance
ANOVA of Squared Deviations from Group Means

              Sum of     Mean
Source DF    Squares   Square   F Value   Pr > F
APPL    2    78.2986  39.1493    0.9527   0.4017
Error  21      862.9  41.0925

General Linear Models Procedure

Level of       ------------MASSE------------
APPL       N      Mean                SD
FSprühen   8    15.5875000       2.07256742
Spritzen   8    11.8500000       2.99714150
Sprühen    8    13.4375000       2.23538907
```

Standardseitig ist für den Levene-Test `type=square` eingestellt. Beide Varianten liefern für die Beispielsdaten keinen Hinweis auf Varianzinhomogenität.

8.2.2.2 Wie kann man die Normalverteilung der zufälligen Abweichungen ε_{ij} prüfen?

Die zufälligen Abweichungen ε_{ij} sind unbekannt. Aus der Zugrundelegung des linearen, additiven Modells können deren Schätzwerte e_{ij}, die Residuen, berechnet werden. Und die können natürlich auf Normalverteiltheit hin untersucht werden. Dazu werden im SAS-Programm Anweisungen zur modellgerechten Berechnung und Speicherung der Residuen eingefügt, die dann mit PROC UNIVARIATE getestet werden:

```
proc glm;
  class appl;
  model masse = appl / SS3;
  output out=resi                    Ausgabe in eine SAS-Datei
         residual = res ;            Speicherung der Residuen unter der Bezeichnung RES
  means appl;
run;
proc print data=resi noobs;          Druck der Residuen
  var res;
proc univariate data=resi normal;
  var res;
run;
```

Die ausgegebenen Residuen entsprechen den in der Tabelle 8.3 berechneten.

```
   RES

-3.8500        -1.5875        -0.0375
 1.3625         3.1500         0.2125
 2.6125         3.4625        -1.2500
-0.4500        -0.6875         1.4625
-3.0375         5.0500         0.1125
 3.1125         0.8625         0.5500
-3.2500        -0.5875        -2.6375
-1.4375         0.0500        -3.1875
```

```
Univariate Procedure
Variable=RES

                  Moments                                  Quantiles(Def=5)

 N               24  Sum Wgts         24     100% Max        5.05     99%       5.05
 Mean             0  Sum               0      75% Q3       1.4125     95%     3.4625
 Std Dev   2.358403  Variance   5.562065      50% Med     0.00625     90%       3.15
 Skewness  0.275956  Kurtosis   -0.47253      25% Q1      -1.5125     10%    -3.1875
 USS       127.9275  CSS        127.9275       0% Min       -3.85      5%      -3.25
 CV               .  Std Mean   0.481407                               1%      -3.85
 T:Mean=0         0  Pr>|T|       1.0000     Range            8.9
 Num ^= 0        24  Num > 0          12     Q3-Q1          2.925
 M(Sign)          0  Pr>=|M|      1.0000     Mode           -3.85
 Sgn Rank        -4  Pr>=|S|      0.9119
 W:Normal  0.970501  Pr<W         0.6784

                                    Extremes

                           Lowest    Obs      Highest    Obs
                           -3.85(      1)     2.6125(      3)
                           -3.25(      7)     3.1125(      6)
                         -3.1875(     24)       3.15(     10)
                         -3.0375(      5)     3.4625(     11)
                         -2.6375(     23)       5.05(     13)
```

Die Annahme der Normalverteilung der Residuen e_{ij} kann nicht abgelehnt werden (`Pr<W:0.6784`). Die weiteren Maßzahlen weisen unter anderem als Summe der Residuen Null aus.

8.2.2.3 Was passiert, wenn mit den Residuen eine Varianzanalyse durchgeführt wird?

Unter Verwendung der nach dem letzten Programm gebildeten SAS-Datei `resi` lautet das Programm für die Residuen:

```
proc glm  data=resi;            Varianzanalyse mit den Residuen
  class appl;
  model res = appl;             Prüfmerkmal sind die Residuen
  means appl;
run;
```

Das Ergebnis (gekürzt) kann eigentlich nur auf den ersten Blick überraschen.

```
Dependent Variable: RES

Source              DF     Sum of Squares     Mean Square    F Value     Pr > F
Model                2         0.00000000      0.00000000       0.00     1.0000
Error               21       127.92750000      6.09178571
Corrected Total     23       127.92750000

             R-Square                C.V.        Root MSE                RES Mean
             0.000000             9999.99      2.46815431                       0

Source              DF          Type I SS     Mean Square    F Value     Pr > F
APPL                 2                  0               0       0.00     1.0000
Source              DF        Type III SS     Mean Square    F Value     Pr > F
APPL                 2         0.00000000      0.00000000       0.00     1.0000

General Linear Models Procedure

Level of          -------------RES-------------
APPL       N        Mean                SD

FSprühen   8    -4.44089E-16        2.07256742
Spritzen   8    2.220446E-16        2.99714150
Sprühen    8    2.220446E-16        2.23538907
```

Ein statistischer Unterschied zwischen den Mittelwerten der Residuen der einzelnen Applikationsverfahren ist nicht nachweisbar. Die Überschreitungswahrscheinlichkeit wird mit 1 angegeben! Die Mittelwerte der Residuen der einzelnen Applikationsverfahren werden mit Null , d. h. in Größenordnungen von 10^{-16} , ausgewiesen. Der Mittelwert des Versuches ist Null. Auf das einfaktorielle Modell entfallen keine Variabilitäten mehr! Im Vergleich zur Varianztabelle mit den Originaldaten bleiben die Restvarianz und die Variabilität innerhalb der einzelnen Stufen des Prüffaktors Applikationsverfahren gleich.
Natürlich kann das Ergebnis nur so aussehen, denn ausgehend vom Modell der Originaldaten $\underline{y}_{ij} = \mu_i + \underline{\varepsilon}_{ij}$ sind die Effekte der einzelnen Applikationsverfahren, also die Effekte der Stufen des Prüffaktors, Null. Das Modell für die Residuen ist $\underline{e}_{ij} = \underline{\varepsilon}_{ij}$.

Aufgabe 8.4: Vergleichen Sie das mittlere prozentuale Erdgasaufkommen der Jahre 1988-1995[12] in

	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Westeuropa	71.3	68.4	67.6	68.6	68.6	70.4	70.5	68.5
Rußland	18.0	20.9	22.0	20.3	19.0	18.6	19.5	19.9
Algerien	10.2	10.1	9.9	10.5	11.6	10.4	9.2	10.5
Libyen	0.5	0.6	0.5	0.6	0.8	0.5	0.5	0.5

Aufgabe 8.5: Die Hemmhöfe von sechs Mutanten M1 bis M6 eines Penicillin produzierenden Mikroorganismusstammes werden in Millimetern gemessen. Je größer die Hemmhöfe sind, um so mehr Penicillin wird produziert[13]. Berechnen Sie für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ die Varianztabelle.

M1	M2	M3	M4	M5	M6
23.92	23.25	24.81	23.92	22.93	21.91
23.06	23.18	24.03	23.82	22.40	23.07
23.04	23.70	23.95	22.71	22.64	22.98
24.15	22.78	24.31	22.92	21.81	23.77
23.01	24.38	23.45	23.67	23.02	22.55
22.89	22.43	23.92	23.29	23.10	23.32
24.03	23.51	24.07	23.89	22.52	22.27
23.58	23.49	25.22	23.14	22.62	22.78

Aufgabe 8.6: Sechs verschiedene Behandlungen gegen Endfäule an Gurken einer Sorte im Gewächshaus sollen verglichen werden. Das Prüfmerkmal ist die Masse pro Teilstück. Die zufällige Anordnung der Teilstücke war gegeben. Berechnen Sie die Varianztabelle für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$.

Beh1	Beh2	Beh3	Beh4	Beh5	Beh6
233.3	375.0	400.0	400.0	450.0	400.0
212.5	355.5	410.0	437.5	287.5	340.0
188.9	175.0	144.4	375.0	322.2	625.0
171.4	280.0	280.0	562.5	525.0	620.0
130.0	300.0	414.3	662.5	287.5	360.0
150.0	155.5	150.0	412.5	400.0	411.1
185.7	312.5	144.0	362.5	300.0	320.0
290.0	430.0	200.0	387.5	600.0	270.0
180.0	475.0	342.8	387.5	375.0	260.0
257.1	433.3	366.7	487.5	366.7	260.0
170.0	356.3	280.0	375.0	225.0	387.5
360.0	225.8	210.0	530.7	286.6	326.5

[12] Daten aus: Erdgas 1996, Erdgasaufkommen in Westeuropa, S. 10
Herausgeber: Ruhrgas Aktiengesellschaft, Presse-/Öffentlichkeitsarbeit, 25 S.
[13] aus: HORN, M. und R. VOLLANDT: Multiple Tests und Auswahlverfahren
Gustav Fischer Verlag, Stuttgart Jena, 1995, S. 3

8.2.3 Modell I der Varianzanalyse

Ausgegangen sind wir vom t-Test zum Vergleich zweier unabhängiger Stichproben hinsichtlich ihrer Mittelwerte - unter der Annahme gleicher Varianzen. Die (einfaktorielle) Varianzanalyse ist für den Vergleich der mittleren Wirkung die Verallgemeinerung des t-Testes. Die Vorausetzungen sind im Abschnitt 8.2.2 genannt. Die *a* Stichproben werden als *a* Stufen eines Prüffaktors angesehen. Getestet wird, ob sich (mindestens) eine Stichproben (eine Stufe des Prüffaktors) in ihrer mittleren Wirkung von der mittleren Wirkung der anderen Stufen unterscheidet. Soll nur über die mittlere Wirkung der ausgewählten Stichproben (Stufen des Prüffaktors) ein statistischer Test vorgenommen werden, dann spricht man vom Modell I der Varianzanalyse, dem Varianzanalysemodell mit festen Effekten. Und genau für dieses Modell gelten die bisher getroffenen Voraussetzungen für die Nullhypothese

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a = \mu$ bzw.

$H_0 : \mu_i - \mu = 0$ für $i = 1, 2, ..., a$

und die Alternativhypothese

$H_A : \mu_i \neq \mu_{i'}$ für mindestens ein Paar $i, i' = 1, 2, ..., a$:

- es gilt das lineare, additive Modell $y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}$ $(i = 1, 2, ..., a ; j = 1, 2, ..., n_i)$ mit
  μ: Erwartungswert der Grundgesamtheit des Versuches,
  μ_i: Erwartungswert der i-ten Stufe des Prüffaktors $(\mu_i = \mu + a_i)$
  a_i: Effekt der i-ten Stufe des Prüffaktors
- der Fehlerterm ε_{ij} ist eine unabhängige Zufallsvariable, deren Varianzen für i und j gleich sind: $VAR(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_a^2 = \sigma^2$
- der Erwartungswert der Fehlerkomponente ist Null: $E(\varepsilon_{ij}) = 0$
- die Zufallsvariable ε_{ij} ist normalverteilt
- es gilt die Reparametrisierungsbedingung $\sum_{i=1}^{a} a_i = 0$.

8.2.4 Konfidenzintervalle der Mittelwerte

Unabhängig von jedem Mittelwertvergleich (s. u.) liefert das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall bereits einen guten Eindruck über die Lage der Mittelwerte unter Berücksichtigung der Variabilität. Die zweiseitigen $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle werden (gleiche Wiederholung n vorausgesetzt) für eine einfaktorielle, vollständig randomisierte Anlage geschätzt nach

$$\left\langle \bar{y}_{i\bullet} - t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}} \,;\, \bar{y}_{i\bullet} + t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}} \right\rangle \quad (i = 1, 2, ..., a) \quad .$$

Beispiel 8.4

Das Beispiel bezieht sich auf die Aufgabe 8.5:

Die Hemmhöfe von sechs Mutanten M1 bis M6 eines Penicillin produzierenden Mikroorganismusstammes werden in Millimetern gemessen. Je größer die Hemmhöfe sind, um so mehr Penicillin wird produziert. Berechnen Sie für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ die Varianztabelle.

M1	M2	M3	M4	M5	M6
23.92	23.25	24.81	23.92	22.93	21.91
23.06	23.18	24.03	23.82	22.40	23.07
23.04	23.70	23.95	22.71	22.64	22.98
24.15	22.78	24.31	22.92	21.81	23.77
23.01	24.38	23.45	23.67	23.02	22.55
22.89	22.43	23.92	23.29	23.10	23.32
24.03	23.51	24.07	23.89	22.52	22.27
23.58	23.49	25.22	23.14	22.62	22.78

Das Ergebnis der Varianzanalyse war:

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;5,42}$	Test
Gesamt	47	24,1268				
zwischen den Faktorstufen (Faktor A)	5	12,4393	2,488	8,64	2,438	signifikant
innerhalb der Faktorstufen (Rest)	42	11,6875	0,278			

Mit $n = 8$
$FG_{Rest} = 42$
$s_{Rest} = \sqrt{0,278} = 0,527$
$t_{0,975;\,42} = 2,018$ (s. Tab. 5.4)

ist die halbe Breite des (1-α)-Konfidenzintervalls $t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}} = 0,532$.

Die (1-α)-Konfidenzintervalle der mittleren Hemmhofdurchmesser der Mikroorganismusstämme sind folglich

Mittelwerte		zweiseitige (1-α)-Konfidenzintervalle der Mittelwerte: untere Grenze	obere Grenze
M1	23,46	22,928	23,992
M2	23,34	22,808	23,872
M3	24,22	23,688	24,752
M4	23,42	22,888	23,952
M5	22,63	22,098	23,162
M6	22,83	22,298	23,362

Die Abb. 8.8 veranschaulicht die Konfidenzintervalle der mittleren Durchmesser der Hemmhöfe der Mikroorganismusstämme.

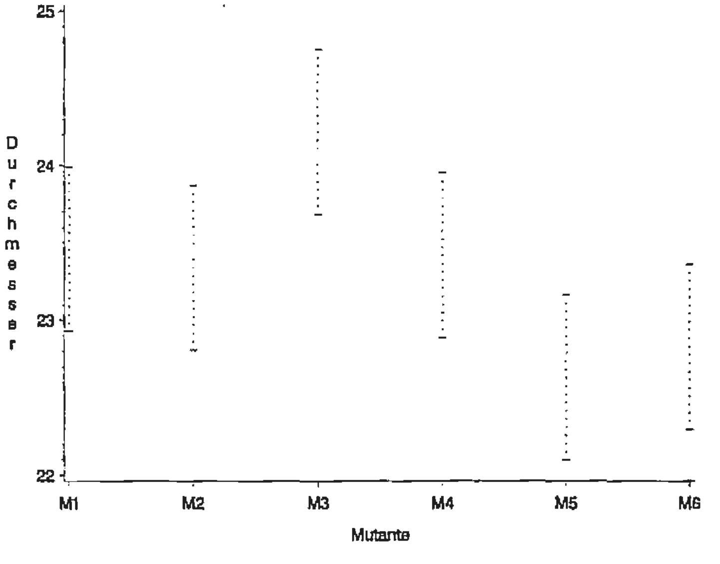


Abb. 8.8: Konfidenzintervalle der mittleren Hemmhofdurchmesser

Nur die Konfidenzintervalle der Mittelwerte der Mutanten M3 und M5 und M3 und M6 überlappen sich nicht. Jeglicher Mittelwertvergleich wird mindestens signifikante Unterschiede zwischen den Hemmhofdurchmessern der Mikroorganismustämme M3 und M5 und M3 und M6 ausweisen.

```
/* SAS-Programm für die Grafik Abb. 8.8 ========================================*/
data bsp84;
  input m1-m6;
  mutante='M1'; hof=m1; output;
  mutante='M2'; hof=m2; output;
  mutante='M3'; hof=m3; output;
  mutante='M4'; hof=m4; output;
  mutante='M5'; hof=m5; output;
  mutante='M6'; hof=m6; output;
cards;
23.92      23.25      24.81      23.92      22.93      21.91
23.06      23.18      24.03      23.82      22.40      23.07
23.04      23.70      23.95      22.71      22.64      22.98
24.15      22.78      24.31      22.92      21.81      23.77
23.01      24.38      23.45      23.67      23.02      22.55
22.89      22.43      23.92      23.29      23.10      23.32
24.03      23.51      24.07      23.89      22.52      22.27
23.58      23.49      25.22      23.14      22.62      22.78
;
proc glm data=bsp84
     noprint outstat=vvv;
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
run;

data _null_;
  set vvv (where=(_source_='ERROR'));
  mq = ss/df;
  call symput('fg',df);
  call symput('mqr',mq);
proc sort data=bsp84;
  by mutante;
proc means data=bsp84 noprint;
  var hof;
  output out=mmm mean=mean;
  by mutante

data mmm;
  set mmm (keep = mutante mean);
  d   = tinv(0.975,&fg) * sqrt(&mqr) * sqrt(2/8);
  ugm = mean - d;
  ogm = mean + d;
data ppp;
  set mmm;
  do i = d/10 to 2*d-d/10 by d/10;
    y = ugm + i;
    output;
  end;

goptions htext=1.4 ftext=swiss;
symbol1 c=black i=none v=star;
symbol2 c=black i=none f=swiss v='-';
symbol3 c=black i=none h=0.2 v=dot;
proc gplot data=ppp;
  label mean="Durchmesser"
        mutante="Mutante";
  plot mean * mutante = 1
       ugm  * mutante = 2
       ogm  * mutante = 2
       y    * mutante = 3
  / overlay
  ;
run;
quit;
/* Ende des SAS-Programms =======================================================*/
```

Der Prüffaktor (Klassifikationsvariable) `mutante` muß mit den Stufen „M1" ... „M6" aufgebaut werden. Dasselbe trifft auch für das Prüfmerkmal `hof` zu.

Datei VVV:

NAME	_SOURCE_	_TYPE_	DF	SS	F	PROB
HOF	ERROR	ERROR	42	11.6875	.	.
HOF	MUTANTE	SS3	5	12.4393	8.94037	.0000076360

Datei MMM:

MUTANTE	_TYPE_	_FREQ_	MEAN
M1	0	8	23.4600
M2	0	8	23.3400
M3	0	8	24.2200
M4	0	8	23.4200
M5	0	8	22.6300
M6	0	8	22.8313

8.2.5 Multiple Mittelwertprozeduren

Anhand der Daten des Beispiels 8.4 (s. o.) sollen verschiedene Mittelwertprozeduren vorgestellt werden. Die Varianztabelle zeigt, daß sich hinsichtlich des Prüfmerkmals „Durchmessers der Hemmhöfe" bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ mindestens eine Mutante signifikant von den anderen unterscheidet. Welche das ist/sind, kann aus dem Ergebnis der Varianztabelle nicht abgeleitet werden. Diese zu finden, ist das Anliegen multipler Mittelwertprozeduren.

8.2.5.1 Verschiedene Zielstellungen und Signifikanzniveaus beeinflussen die Wahl eines multiplen Mittelwertvergleiches

Das Hauptanliegen beim Testen von Hypothesen ist, die Irrtumswahrscheinlichkeit möglichst klein, d. h. nicht größer als den für die Irrtumswahrscheinlichkeit vorgegebenen Wert werden zu lassen. Der F-Test testet die Hypothese

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a = \mu$

gegen die Alternativhypothese

$H_A : \mu_i \neq \mu_{i'}$ für mindestens ein $i \neq i'$, $i, i' = 1, 2, \ldots, a$.

Für diese globale Hypothese wird die Irrtumswahrscheinlichkeit mit maximal dem vorgegebenen Wert eingehalten. Diese Irrtumswahrscheinlichkeit wird globale, versuchsbezogene, experimentweisen oder simultanen Irrtumswahrscheinlichkeit genannt. Bei der Richtigkeit der Globalhypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a = \mu$, d. h. wenn alle Einzelhypothesen wahr sind, ist somit die Wahrscheinlichkeit, eine wahre Einzelhypothese abzulehnen, kleiner oder gleich dem für die Irrtumswahrscheinlichkeit vorgegenbenen Wert.

Bei *a* zu vergleichenden Mittelwerten gibt es im allgemeinen $\binom{a}{2}$ paarweise Vergleiche. Bei a = 6 sind das beispielsweise $m = a*(a-1)/2 = 15$ Vergleiche. Dementsprechend ist auch die Anzahl der zu prüfenden Einzelhypothesen. Die Nullhypothesen für diese multiple Betrachtung lauten:

$H_0^{i,i'} : \mu_i = \mu_{i'}$ bzw. $\mu_i - \mu_{i'} = 0$ für alle $i, i' = 1, 2, \ldots, a : i > i'$.

Sie werden gegen die Alternativhypothesen

$H_A^{i,i'} : \mu_i \neq \mu_{i'}$ $(i, i' = 1, 2, \ldots, a : i > i')$ [zweiseitige Fragestellung]

$H_A^{i,i'} : \mu_i < \mu_{i'}$ $(i, i' = 1, 2, \ldots, a : i > i')$ [einseitige Fragestellung]

$H_A^{i,i'} : \mu_i > \mu_{i'}$ $(i, i' = 1, 2, \ldots, a : i > i')$ [einseitige Fragestellung]

getestet.

Bei a = 6 sind das folgende Einzelhypothesen, die gegen die entsprechenden Alternativhypothese getestet werden:

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
μ_1	•					
μ_2	$H_0^{21} : \mu_2 = \mu_1$	•				
μ_3	$H_0^{31} : \mu_3 = \mu_1$	$H_0^{32} : \mu_3 = \mu_2$	•			
μ_4	$H_0^{41} : \mu_4 = \mu_1$	$H_0^{42} : \mu_4 = \mu_2$	$H_0^{43} : \mu_4 = \mu_3$	•		
μ_5	$H_0^{51} : \mu_5 = \mu_1$	$H_0^{52} : \mu_5 = \mu_2$	$H_0^{53} : \mu_5 = \mu_3$	$H_0^{54} : \mu_5 = \mu_4$	•	
μ_6	$H_0^{61} : \mu_6 = \mu_1$	$H_0^{62} : \mu_6 = \mu_2$	$H_0^{63} : \mu_6 = \mu_3$	$H_0^{64} : \mu_6 = \mu_4$	$H_0^{65} : \mu_6 = \mu_5$	•

Die zum Testen der Einzelhypothesen zugrundegelegte Irrtumswahrscheinlichkeit heißt *multiple, vergleichsbezogene oder individuelle Irrtumswahrscheinlichkeit.* Für diese multiple Betrachtungsweise liegen nun eine Vielzahl verschiedener Testprozeduren vor, die sich dadurch unterscheiden, ob sie ohne Beachtung der anderen Vergleiche nur den einzelnen Test betrachten und erst anschließend eine globale Auswertung vornehmen (Einschritt-Verfahren) oder Mehrschritt-Verfahren, deren Testaussage auf den der Größe nach geordneten Mittelwerten basiert. Und letztlich führt die für die Mittelwertdifferenzen zugrundegelegte Verteilung zu einer weiteren wesentlichen Unterscheidung der multiplen Tests.

Eine Ausnahme stellt der multiple t-Test dar, weil nach den voneinander unabhängigen Tests der Einzelhypothese keine globale Auswertung erfolgt. Das soll im folgenden auch durch die Verwendung der Begriffe Test und Prozedur verdeutlicht werden.

Wenn nun der multiple t-Test verwendet wird und alle Einzelvergleiche zusammen interpretiert werden sollen, dann wird ein über den Einzeltest mit vergleichsbezogener Irrtumswahrscheinlichkeit hinausgehender Test mit versuchsbezogener Interpretation vorgenommen! Die dann zugrundezulegende versuchsbezogene Irrtumswahrscheinlichkeit ist in Abhängigkeit von der Anzahl der Vergleiche m wesentlich größer als die für den paarweisen Vergleich gewählte:

$$\alpha_{\text{vergleichsbezogen}} \leq \alpha_{\text{versuchsbezogen}} \leq [1-(1-\alpha_{\text{vergleichsbezogen}})^{m}]$$

Die Auswirkungen verdeutlicht die Tabelle 8.5[14].

Tabelle 8.5: Die Veränderung der versuchsbezogene Irrtumswahrscheinlichkeit bei für den paarweisen Vergleich vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_{\text{vergleichsbezogen}}$ = 0.1, 0.05 und 0.01

Anzahl der Mittelwerte a	Anzahl der Vergleiche m	$\alpha_{\text{vergleichsbezogen}}$ = 0.1	$\alpha_{\text{vergleichsbezogen}}$ = 0.05	$\alpha_{\text{vergleichsbezogen}}$ = 0.01
2	1	0.100	0.050	0.010
3	3	0.271	0.143	0.030
4	6	0.469	0.265	0.059
5	10	0.651	0.401	0.096
6	15	0.794	0.537	0.140
7	21	0.891	0.659	0.190
8	28	0.948	0.762	0.245
9	36	0.977	0.842	0.304
10	45	0.991	0.901	0.364

Beim Vergleich von beispielsweise 6 Mittelwerten beträgt die Wahrscheinlichkeit, ein wahre Einzelhypothese (paarweiser Vergleich) abzulehnen, jeweils α. Die Wahrscheinlichkeit, von allen Einzelhypothesen mindestens eine Hypothese abzulehnen, kann allerdings bis zu 0,537 (bei $\alpha_{\text{vergleichsbezogen}}$ = 0,05) betragen, da die Einzeltests ja im allgemeinen nicht voneinander unabhängig sind. [Beim Werfen einer Münze hat das Ereignis „Zahl" eine Wahrscheinlichkeit von 0,50.]
Damit wird der Widerspruch zum F-Test offenbar, der nur mit der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α fälschlich Signifikanz liefert.

[14] SAS-Programm:
```
proc iml;
  alpha={0.1  0.05  0.01};
  a    ={2,3,4,5,6,7,8,9,10};
  m    = a;
  p=j(9,3,1);
  do i=1 to 9;
    m[i]=a[i]*(a[i]-1)/2;
    do j=1 to 3;
       p[i,j]=1-(1-alpha[j])**m[i];
    end;
  end;
  print a [format=3.0] m [format=3.0] p [format=7.3];
quit;
```

8.2.5.2 Verschiedene Fragestellungen für den multiplen Vergleich von Mittelwerten

Das Ziel eines Versuches bestimmt, welche der verschiedenen multiplen Vergleichsprozeduren herangezogen werden muß. In der folgenden Tabelle sind einige Fragestellungen und ihre mögliche Realisierung mit Hilfe multipler Vergleichsprozeduren zusammengestellt.

Fragestellung	Vergleichsprozedur
Unterscheiden sich Mittelwerte von den a zu untersuchenden Mittelwerten? Es interessiert nicht, welcher sich von den anderen Mittelwerten unterscheidet.	F-Test
Unterscheiden sich die paarweisen Mittelwertdifferenzen von vor dem Versuch ausgewählter Mittelwerte signifikant? Die Testaussage eines Vergleichs soll unabhängig von den anderen getroffen werden.	multipler t-Test
Gibt es bei der Einbeziehung aller paarweisen Mittelwertdifferenzen Mittelwerte, die sich von den anderen unterscheiden?	Tukey-Prozedur Bonferroni-Fisher-Prozedur Newman-Keuls-Prozedur
Gibt es Mittelwerte, die sich bezüglich eines Standards, einer Kontrolle oder anderen Bezugsvariante unterscheiden?	Dunnett-Prozedur Dunnett-Prozedur mit gestaffelten Grenzdifferenzen
Welche Mittelwerte unterscheiden sich bei der Prüfung aller Mittelwertdifferenzen zum Gesamtmittel des Versuches von den anderen?	Maximum-Modulus-Prozedur
Gibt es aus den Mittelwerten gebildete Kontraste, die sich signifikant unterscheiden?	Scheffé-Prozedur

8.2.5.3 Multipler t-Test

Unter der Annahme, daß die Varianzen gleich sind, wird für den t-Test zweier unabhängiger Stichproben der Schätzwert der gemeinsamen Varianz gebildet aus:

$$s^2_{\text{gemeinsam}} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{2}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{n_i}}{n_1+n_2-2} \quad .$$

Wird die Bildung dieses Schätzwertes auf *a* Stichproben (die Gleichheit der Varianzen vorausgesetzt) übertragen, ergibt sich:

$$s^2_{\text{gemeinsam}} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{n_i}}{n_1+n_2+\dots+n_a-a} = s^2_{\text{Rest}} \quad .$$

Das ist genau der Schätzwert für die Varianz innerhalb der Faktorstufen, die Restvarianz.

Für jede einzelne Nullhypothese H_0: $\mu_i = \mu_{i'}$ oder $\mu_i - \mu_{i'} = 0$ (für alle i, i' : $i \neq i'$) wird die Prüfgröße berechnet nach:

$$t_{i,i'} = \frac{\left|\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right|}{s_{Rest}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}}}$$; bei gleichgroßen Stichprobenumfängen $n_i = n_{i'} = n$ vereinfacht sich diese Rechnung: $$t_{i,i'} = \frac{\left|\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right|}{s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}} \ .$$

Die für jeden paarweisen Vergleich zu berechnenden Prüfgrößen $t_{i,i'}$ werden mit dem t-Quantil $t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}}$ verglichen. Bei $t_{i,i'} \le t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}}$ wird die Nullhypothese angenommen, ansonsten ist sie zu verwerfen.

Eine andere Form, eine Entscheidung zu treffen, basiert auf der Berechnung der Konfidenzintervalle:

$$\bar{y}_i - \bar{y}_{i'} \mp t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}}$$ bzw. für $n_i = n_{i'} = n$ ($\forall$ i, i': i≠i') $$\bar{y}_i - \bar{y}_{i'} \mp t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}} \ .$$

Nun ist erkennbar, daß es vorteilhaft sein kann, die halbe Breite des Konfidenzintervalls, die ja von der Mittelwertdifferenz unabhängig ist, für die Entscheidungsfindung heranzuziehen. Diese halbe Breite des Konfidenzintervalls wird als Grenzdifferenz GD_α bezeichnet. Da diese Herangehensweise für alle multiplen Vergleiche gilt, wird sie speziell für den multiplen t-Test mit LSD_α (least significant difference) bezeichnet:

$$\boxed{GD_\alpha = LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}}}$$ bzw. für $n_i = n_{i'} = n$ ($\forall$ i, i': i≠i') $$\boxed{GD_\alpha = LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}} \ .$$

Für multiple Prozeduren gilt allgemein für die Grenzdifferenz:

$$\boxed{GD_\alpha = \xi_\alpha * s_{Rest}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}}}$$ bzw. für $n_i = n_{i'} = n$ ($\forall$ i, i': i≠i') $$\boxed{GD_\alpha = \xi_\alpha * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}} \ ,$$

wobei ξ_α [15] für das Quantil der Verteilung steht, die der Verteilung der Mittelwertdifferenzen zugrundegelegt wird. Offensichtlich wird auch, daß die multiplen Mittelwertprozeduren keinesfalls des vorgeschalteten F-Testes (→ Varianztabelle) bedürfen.

Die Nullhypothese ist zu verwerfen ist, wenn $\left|\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right| > GD_\alpha$.

Papier und Bleistift

Die Mittelwerte werden zwecks Bildung der paarweisen Differenzen vorteilhaft in einer Matrix angeordnet, wobei nur die Differenzen des oberen oder des unteren Dreiecks zu bilden sind:

		M1	M2	M3	M4	M5	M6
		23,46	23,34	24,22	23,42	22,63	22,83
M1	23,46	=					
M2	23,34	-0,12	=				
M3	24,22	0,76	0,88	=			
M4	23,42	-0,04	0,08	-0,80	=		
M5	22,63	-0,83	-0,71	-1,59	-0,79	=	
M6	22,83	-0,63	-0,51	-1,39	-0,59	0,20	=

[15] in Anlehnung an:
HOLZER, Ch. und M. PRECHT: Welchen multiplen Mittelwertsvergleich soll man verwenden? Landwirtschaftliches Jahrbuch **69** (1992) Heft 4, S. 411-436

Aus der Varianztabelle oder separat berechnet sind:

$s^2_{Rest} = 0{,}278$
$FG_{Rest} = N - a = 6 * n - 6 = 6 * 8 - 6 = 42$

Bei gleichen Stichprobenumfängen n = 8 ist das t-Quantil $t_{1-\alpha/2;\, FG_{Rest}} = t_{0.975;\, 42} = 2{,}018$ (s. Tab. 5.4 oder SAS-Funktion `tinv(0.975,42)`) und damit ergibt sich die Grenzdifferenz des multiplen t-Testes mit

$$LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}} = 2{,}018 * \sqrt{0{,}278}\sqrt{\frac{2}{8}} = 0{,}532 \quad .$$

Die Differenzen, die absolut größer sind als diese Grenzdifferenz, werden mit * markiert:

		M1 23,46	M2 23,34	M3 24,22	M4 23,42	M5 22,63	M6 22,83
M1	23,46						
M2	23,34	-					
M3	24,22	*	*				
M4	23,42	-	-	*			
M5	22,63	*	*	*	*		
M6	22,83	*	-	*	*	-	

Diese Mittelwerte unterscheiden sich signifikant.

Das ist eine Form der Darstellung. Die Verwendung von Konfidenzintervallen wurde oben bereits angesprochen. Für die paarweisen Vergleiche lauten die (1-α)-Konfidenzintervalle der Mittelwertdifferenzen

$$\left\langle \left(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right) - GD_\alpha \,;\, \left(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right) + GD_\alpha \right\rangle \qquad \text{für alle i, i' : i}\neq\text{i'}.$$

Signifikanz liegt vor, wenn das Konfidenzintervall die Null nicht einschließt.

$\bar{y}_i$		$\bar{y}_{i'}$		$\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}$	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
M1	23,46	M2	23,34	0,12	-0,41	0,65	nicht signifikant
		M3	24,22	-0,76	-1,29	-0,23	signifikant
		M4	23,42	0,04	-0,49	0,57	nicht signifikant
		M5	22,63	0,83	0,30	1,36	signifikant
		M6	22,83	0,63	0,10	1,16	signifikant
M2	23,34	M3	24,22	-0,88	-1,41	-0,35	signifikant
		M4	23,42	-0,08	-0,61	0,45	nicht signifikant
		M5	22,63	0,71	0,18	1,24	signifikant
		M6	22,83	0,51	-0,02	1,04	nicht signifikant
M3	24,22	M4	23,42	0,80	0,27	1,33	signifikant
		M5	22,63	1,59	1,06	2,12	signifikant
		M6	22,83	1,39	0,86	1,92	signifikant
M4	23,42	M5	22,63	0,79	0,26	1,32	signifikant
		M6	22,83	0,59	0,06	1,12	signifikant
M5	22,63	M6	22,83	-0,20	-0,73	0,33	nicht signifikant

Eine weitere Methode Signifikanzen darzustellen, ist die Methode der Verbindungslinien. Alle Mittelwerte, die zur gleichen Verbindungslinie gehören, unterscheiden sich statistisch nicht. Dazu werden die der Größe nach geordneten Mittelwerte solange durch eine gemeinsame Verbindungslinie unterstrichen, wie die Differenz zwischen dem ersten und letzten Mittelwert dieser Linie kleiner als die Grenzdifferenz GD_{α} ist. Dieses Verfahren wird beginnend mit dem nächst größeren Mittelwert wiederholt. Ergibt sich keine neue oder keine weiterführende Linie, werden einschließende Teillinien im Ergebnis weggelassen.

M5	M6	M2	M4	M1	M3
22,63	22,83	23,34	23,42	23,46	24,22

Um hinsichtlich der Signifikanz die Gruppenzugehörigkeit analog obiger Verbindungslinien zu kennzeichnen, werden häufig auch gleiche Buchstaben verwendet:

M1	23,46			c	
M2	23,34		b	c	
M3	24,22				d
M4	23,42			c	
M5	22,63	a			
M6	22,83	a	b		

SAS

```
proc glm data=bsp84;
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
  means mutante/ t cldiff nosort;
  means mutante/ t lines;
run;
```

Die Model-Anweisung in `proc glm` verbindet das Prüfmerkmal (`hof`) mit dem Prüffaktor (`mutante`) mit seinen Stufen M1 bis M6. Die Means-Anweisung kann vieles bewirken. Mit der Option `t` wird die Varianztabelle ausgegeben und der multiple t-Test unter Ausgabe der Konfidenzintervalle (`cldiff`) durchgeführt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist mit $\alpha = 0.05$ voreingestellt! Die Option `nosort` bewirkt eine Anordnung der Mittelwertvergleiche, die es gestattet, aus dem SAS-Output doppelte Vergleiche (markiert mit **del**) zu Verringerung des Ausgabeumfangs schneller entfernen zu können. Die Option `lines` verbindet die Methode der Verbindungslinien mit der Buchstabenkennzeichnung.

Das Ergebnis lautet:

```
General Linear Models Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
MUTANTE        6    M1 M2 M3 M4 M5 M6

Number of observations in data set = 48

General Linear Models Procedure
Dependent Variable: HOF

Source                   DF    Sum of Squares      F Value       Pr > F
Model                     5       12.43934375         8.94       0.0001
Error                    42       11.68748750
Corrected Total          47       24.12683125

                   R-Square              C.V.                  HOF Mean
                   0.515581          2.262380                23.3168750

Source                   DF       Type III SS      F Value       Pr > F
MUTANTE                   5       12.43934375         8.94       0.0001
```

```
General Linear Models Procedure
T tests (LSD) for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I comparisonwise error rate not the
      experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of T= 2.01808
Least Significant Difference= 0.5323

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                       Lower     Difference     Upper
  MUTANTE           Confidence    Between    Confidence
 Comparison            Limit       Means        Limit

M1    - M2          -0.4123      0.1200       0.6523
M1    - M3          -1.2923     -0.7600      -0.2277    ***
M1    - M4          -0.4923      0.0400       0.5723
M1    - M5           0.2977      0.8300       1.3623    ***
M1    - M6           0.0965      0.6288       1.1610    ***

M2    - M1          -0.6523     -0.1200       0.4123                          del
M2    - M3          -1.4123     -0.8800      -0.3477    ***
M2    - M4          -0.6123     -0.0800       0.4523
M2    - M5           0.1777      0.7100       1.2423    ***
M2    - M6          -0.0235      0.5087       1.0410

M3    - M1           0.2277      0.7600       1.2923    ***                   del
M3    - M2           0.3477      0.8800       1.4123    ***                   del
M3    - M4           0.2677      0.8000       1.3323    ***
M3    - M5           1.0577      1.5900       2.1223    ***
M3    - M6           0.8565      1.3888       1.9210    ***

M4    - M1          -0.5723     -0.0400       0.4923                          del
M4    - M2          -0.4523      0.0800       0.6123                          del
M4    - M3          -1.3323     -0.8000      -0.2677    ***                   del
M4    - M5           0.2577      0.7900       1.3223    ***
M4    - M6           0.0565      0.5888       1.1210    ***

M5    - M1          -1.3623     -0.8300      -0.2977    ***                   del
M5    - M2          -1.2423     -0.7100      -0.1777    ***                   del
M5    - M3          -2.1223     -1.5900      -1.0577    ***                   del
M5    - M4          -1.3223     -0.7900      -0.2577    ***                   del
M5    - M6          -0.7335     -0.2012       0.3310

M6    - M1          -1.1610     -0.6288      -0.0965    ***                   del
M6    - M2          -1.0410     -0.5087       0.0235                          del
M6    - M3          -1.9210     -1.3888      -0.8565    ***                   del
M6    - M4          -1.1210     -0.5888      -0.0565    ***                   del
M6    - M5          -0.3310      0.2012       0.7335                          del

General Linear Models Procedure
T tests (LSD) for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I comparisonwise error rate not the
      experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of T= 2.02
Least Significant Difference= 0.5323

Means with the same letter are not significantly different.

             T Grouping             Mean       N  MUTANTE

                      A          24.2200       8  M3

                      B          23.4600       8  M1
                      B
                      B          23.4200       8  M4
                      B
              C       B          23.3400       8  M2
              C
              C       D          22.8313       8  M6
                      D
                      D          22.6300       8  M5
```

8.2.5.4 Bonferroni-Fisher-Prozedur

Zunehmend findet die Bonferroni-Fisher- (oder Dunn-) Prozedur Anwendung. Sie ist von allen multiplen Prozeduren zum Vergleich von Mittelwerten die strengste, weil die Irrtumswahrscheinlichkeit für jeden Einzelvergleich durch die Anzahl aller Mittelwertvergleiche m dividiert wird und sich folglich die Quantile der zugrundegelegten t-Verteilung vergrößern. Ansonsten gleicht die Bonferroni-Fisher-Prozedur dem multiplen t-Test. Es wird $t_{1-\alpha/2;\, FG_{Rest}}$ durch $t_{1-\alpha/(2*m);\, FG_{Rest}}$ ersetzt. Die Grenzdifferenz GD_α der Bonferroni-Fisher-Prozedur hat das Symbol FSD_α (Fisher's significant difference):

$$GD_\alpha = FSD_{\alpha;m} = t_{1-\alpha/(2*m);FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}$$

bzw. für $n_i = n_{i'} = n$ ($\forall$ i, i': i≠i')

$$GD_\alpha = FSD_{\alpha;m} = t_{1-\alpha/(2*m);FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{2}{n}} \quad .$$

SAS

Zwei Programmversionen sollen die Bonferroni-Fisher-Prozedur realisieren. Dazu wird einmal der multiple t-Test mit $\alpha = 0.05/15 \approx 0.00333$ (da 15 Vergleiche)

```
proc glm data=bsp84;
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
  means mutante
       /alpha=0.00333 t cldiff nosort;
  means mutante
       /alpha=0.00333 t lines;
run;
```

und zum anderen die Bonferroni-Fisher-Prozedur durch die Option `bon` angewiesen, wobei dann die voreingestellte Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ gewählt wird.

```
proc glm data=bsp84;
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
  means mutante
       /bon cldiff nosort;
  means mutante
       /bon lines;
run;
```

Die ausgegebene Varianztabelle entspricht der bereits bekannten. Sie wird deshalb weggelassen. Die geringen numerischen Unterschiede resultieren aus der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.00333$, da $0.05/15 \approx 0.00333$. Zwecks besserer Vergleichbarkeit sind die Ergebnisse beider Prozeduren formatiert gegenübergestellt. Die doppelten paarweisen Vergleiche werden weggelassen.

```
General Linear Models Procedure
T tests (LSD) for variable: HOF
NOTE: This test controls the type I
      comparisonwise error rate
      not the experimentwise error rate.

Alpha= 0.00333  Confidence= 0.99667
df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of T= 3.11280
Least Significant Difference= 0.821
Comparisons significant at the
0.00333 level are indicated by '***'.
```

```
General Linear Models Procedure
Bonferroni (Dunn) T tests for variable: HOF
NOTE: This test controls the type I
      experimentwise error rate
      but generally has a higher type II
      error rate than
      Tukey's for all pairwise comparisons.
Alpha= 0.05  Confidence= 0.95
df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of T= 3.11244
Minimum Significant Difference= 0.8209
Comparisons significant at the
0.05 level are indicated by '***'.
```

```
            Lower    Difference  Upper
 MUTANTE  Confidence Between   Confidence
Comparison  Limit      Means     Limit

M1 - M2    -0.7010    0.1200    0.9410
M1 - M3    -1.5810   -0.7600    0.0610
M1 - M4    -0.7810    0.0400    0.8610
M1 - M5     0.0090    0.8300    1.6510   ***
M1 - M6    -0.1923    0.6288    1.4498

M2 - M3    -1.7010   -0.8800   -0.0590   ***
M2 - M4    -0.9010   -0.0800    0.7410
M2 - M5    -0.1110    0.7100    1.5310
M2 - M6    -0.3123    0.5087    1.3298

M3 - M4    -0.0210    0.8000    1.6210
M3 - M5     0.7690    1.5900    2.4110   ***
M3 - M6     0.5677    1.3888    2.2098   ***

M4 - M5    -0.0310    0.7900    1.6110
M4 - M6    -0.2323    0.5888    1.4098

M5 - M6    -1.0223   -0.2012    0.6198

General Linear Models Procedure

T tests (LSD) for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I
      comparisonwise error rate
      not the experimentwise error rate.

Alpha= 0.00333  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of T= 3.11
Least Significant Difference= 0.821

Means with the same letter are not
significantly different.

         T Grouping         Mean    N  MUTANTE

             A            24.2200   8  M3
             A
         B   A            23.4600   8  M1
         B   A
         B   A    C       23.4200   8  M4
         B        C
         B        C       23.3400   8  M2
         B        C
         B        C       22.8313   8  M6
                  C
                  C       22.6300   8  M5
```

```
                Simultaneous         Simultaneous
                  Lower    Difference  Upper
 MUTANTE        Confidence Between   Confidence
Comparison        Limit      Means     Limit

M1 - M2    -0.7009    0.1200    0.9409
M1 - M3    -1.5809   -0.7600    0.0609
M1 - M4    -0.7809    0.0400    0.8609
M1 - M5     0.0091    0.8300    1.6509   ***
M1 - M6    -0.1922    0.6288    1.4497

M2 - M3    -1.7009   -0.8800   -0.0591   ***
M2 - M4    -0.9009   -0.0800    0.7409
M2 - M5    -0.1109    0.7100    1.5309
M2 - M6    -0.3122    0.5087    1.3297

M3 - M4    -0.0209    0.8000    1.6209
M3 - M5     0.7691    1.5900    2.4109   ***
M3 - M6     0.5678    1.3888    2.2097   ***

M4 - M5    -0.0309    0.7900    1.6109
M4 - M6    -0.2322    0.5888    1.4097

M5 - M6    -1.0222   -0.2012    0.6197

General Linear Models Procedure

Bonferroni (Dunn) T tests for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I
      experimentwise error rate,
      but generally has a higher type II
      error rate than REGWQ.

Alpha= 0.05  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of T= 3.11
Minimum Significant Difference= 0.8209

Means with the same letter are not
significantly different.

      Bon Grouping          Mean    N  MUTANTE

             A            24.2200   8  M3
             A
         B   A            23.4600   8  M1
         B   A
         B   A    C       23.4200   8  M4
         B        C
         B        C       23.3400   8  M2
         B        C
         B        C       22.8313   8  M6
                  C
                  C       22.6300   8  M5
```

Tabelle 8.6 : Quantile der studentisierten Spannweiten-Verteilung $q_{1-\alpha,a,FG}$ für $\alpha = 0{,}05$

a / FG	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50
1	17.969	26.976	32.819	37.081	40.407	43.118	45.397	47.356	49.070	50.591	51.956	53.192	54.321	55.359	56.318	57.210	58.042	58.822	59.555	65.145	68.907	71.723
2	6.085	8.331	9.798	10.881	11.734	12.434	13.027	13.538	13.987	14.387	14.747	15.076	15.375	15.650	15.905	16.143	16.365	16.573	16.769	18.269	19.285	20.048
3	4.501	5.910	6.825	7.502	8.037	8.478	8.852	9.177	9.462	9.717	9.946	10.155	10.346	10.522	10.686	10.838	10.980	11.114	11.240	12.207	12.864	13.358
4	3.927	5.040	5.757	6.287	6.706	7.053	7.347	7.602	7.826	8.027	8.208	8.373	8.524	8.664	8.793	8.914	9.027	9.133	9.233	10.003	10.528	10.924
5	3.635	4.602	5.218	5.673	6.033	6.330	6.582	6.801	6.995	7.167	7.324	7.465	7.596	7.716	7.828	7.932	8.030	8.122	8.208	8.875	9.331	9.675
6	3.460	4.339	4.896	5.305	5.629	5.895	6.122	6.319	6.493	6.649	6.789	6.917	7.034	7.143	7.244	7.338	7.426	7.509	7.587	8.189	8.601	8.913
7	3.344	4.165	4.681	5.060	5.359	5.605	5.814	5.995	6.154	6.296	6.425	6.541	6.648	6.747	6.838	6.923	7.002	7.077	7.147	7.684	8.047	8.319
8	3.261	4.041	4.529	4.886	5.167	5.399	5.596	5.766	5.917	6.052	6.173	6.284	6.386	6.480	6.567	6.648	6.724	6.796	6.864	7.386	7.743	8.014
9	3.199	3.948	4.415	4.755	5.023	5.244	5.432	5.594	5.738	5.866	5.982	6.088	6.185	6.275	6.359	6.437	6.510	6.578	6.643	7.146	7.493	7.758
10	3.151	3.877	4.327	4.654	4.912	5.124	5.304	5.460	5.598	5.722	5.833	5.935	6.028	6.114	6.194	6.269	6.339	6.405	6.468	6.952	7.286	7.541
11	3.113	3.820	4.256	4.574	4.823	5.028	5.202	5.353	5.486	5.605	5.713	5.811	5.901	5.985	6.062	6.134	6.202	6.266	6.326	6.793	7.115	7.361
12	3.081	3.773	4.199	4.508	4.750	4.949	5.118	5.265	5.394	5.509	5.613	5.708	5.795	5.875	5.950	6.020	6.085	6.146	6.204	6.648	6.951	7.179
13	3.055	3.734	4.151	4.453	4.690	4.884	5.049	5.192	5.318	5.430	5.532	5.624	5.709	5.788	5.861	5.928	5.992	6.052	6.108	6.544	6.842	7.066
14	3.033	3.701	4.111	4.407	4.639	4.829	4.990	5.130	5.253	5.363	5.463	5.553	5.636	5.713	5.784	5.851	5.913	5.972	6.027	6.454	6.747	6.969
15	3.014	3.673	4.076	4.367	4.595	4.782	4.940	5.077	5.198	5.306	5.403	5.492	5.573	5.649	5.719	5.784	5.845	5.903	5.957	6.377	6.665	6.883
16	2.998	3.649	4.046	4.333	4.557	4.741	4.896	5.031	5.150	5.256	5.352	5.439	5.519	5.593	5.661	5.726	5.786	5.842	5.896	6.308	6.592	6.807
17	2.984	3.628	4.020	4.303	4.524	4.705	4.858	4.991	5.108	5.212	5.306	5.392	5.471	5.544	5.611	5.675	5.734	5.789	5.842	6.248	6.528	6.740
18	2.971	3.609	3.997	4.276	4.494	4.673	4.824	4.955	5.070	5.173	5.266	5.351	5.429	5.500	5.567	5.629	5.688	5.742	5.794	6.195	6.470	6.680
19	2.960	3.593	3.977	4.253	4.468	4.645	4.794	4.924	5.037	5.139	5.231	5.314	5.391	5.462	5.528	5.589	5.647	5.701	5.752	6.147	6.419	6.626
20	2.950	3.578	3.958	4.232	4.445	4.620	4.768	4.895	5.008	5.108	5.199	5.282	5.357	5.427	5.492	5.553	5.610	5.663	5.714	6.104	6.373	6.577
21	2.941	3.565	3.942	4.213	4.424	4.597	4.743	4.870	4.981	5.081	5.170	5.252	5.327	5.396	5.460	5.520	5.576	5.629	5.679	6.065	6.331	6.532
22	2.933	3.553	3.927	4.196	4.405	4.577	4.722	4.847	4.957	5.056	5.144	5.225	5.299	5.368	5.431	5.491	5.546	5.599	5.648	6.030	6.292	6.492
23	2.926	3.542	3.914	4.180	4.388	4.558	4.702	4.826	4.935	5.033	5.121	5.201	5.274	5.342	5.405	5.464	5.519	5.571	5.620	5.998	6.258	6.455
24	2.919	3.532	3.901	4.166	4.373	4.541	4.684	4.807	4.915	5.012	5.099	5.179	5.251	5.319	5.381	5.439	5.494	5.545	5.594	5.968	6.226	6.422
25	2.913	3.523	3.890	4.153	4.358	4.526	4.667	4.789	4.897	4.993	5.079	5.158	5.230	5.297	5.359	5.417	5.471	5.522	5.570	5.941	6.197	6.391
26	2.907	3.514	3.880	4.141	4.345	4.511	4.652	4.773	4.880	4.975	5.061	5.139	5.211	5.277	5.339	5.396	5.450	5.500	5.548	5.916	6.170	6.362
27	2.902	3.506	3.870	4.130	4.333	4.498	4.638	4.758	4.864	4.959	5.044	5.122	5.193	5.259	5.320	5.377	5.430	5.480	5.528	5.893	6.145	6.336
28	2.897	3.499	3.861	4.120	4.322	4.486	4.625	4.745	4.850	4.944	5.029	5.106	5.177	5.242	5.302	5.359	5.412	5.462	5.509	5.872	6.122	6.311
29	2.892	3.493	3.853	4.111	4.311	4.475	4.613	4.732	4.837	4.930	5.014	5.091	5.161	5.226	5.286	5.342	5.395	5.445	5.491	5.852	6.100	6.288
30	2.888	3.487	3.845	4.102	4.301	4.464	4.601	4.720	4.824	4.917	5.001	5.077	5.147	5.211	5.271	5.327	5.379	5.429	5.475	5.833	6.080	6.267
40	2.858	3.442	3.791	4.039	4.232	4.388	4.521	4.634	4.735	4.824	4.904	4.977	5.044	5.106	5.163	5.216	5.266	5.313	5.358	5.700	5.934	6.112
50	2.841	3.416	3.758	4.002	4.190	4.344	4.473	4.584	4.681	4.768	4.847	4.918	4.983	5.043	5.098	5.150	5.199	5.245	5.288	5.620	5.847	6.019
60	2.829	3.399	3.737	3.977	4.163	4.314	4.441	4.550	4.646	4.732	4.808	4.878	4.942	5.001	5.056	5.107	5.154	5.199	5.241	5.566	5.789	5.958
80	2.814	3.377	3.711	3.947	4.129	4.278	4.402	4.509	4.603	4.686	4.761	4.829	4.892	4.949	5.003	5.052	5.099	5.142	5.183	5.500	5.716	5.880
100	2.806	3.365	3.695	3.929	4.109	4.256	4.379	4.484	4.577	4.659	4.733	4.800	4.862	4.918	4.971	5.020	5.066	5.108	5.149	5.460	5.673	5.833
150	2.794	3.348	3.674	3.905	4.083	4.227	4.348	4.451	4.542	4.623	4.696	4.762	4.822	4.877	4.929	4.977	5.021	5.063	5.103	5.407	5.615	5.771
200	2.789	3.339	3.664	3.893	4.069	4.212	4.332	4.435	4.525	4.605	4.677	4.742	4.802	4.857	4.908	4.955	4.999	5.041	5.080	5.381	5.585	5.740
∞	2.772	3.315	3.633	3.858	4.030	4.170	4.287	4.387	4.474	4.552	4.622	4.685	4.743	4.796	4.846	4.891	4.934	4.974	5.012	5.302	5.498	5.647

8.2.5.5 Tukey-Prozedur

Die Tukey-Prozedur ist von den Einschritt-Verfahren die mächtigste Prozedur, weil sie für alle paarweisen Mittelwertdifferenzen die engsten Konfidenzintervalle und damit auch die kleinste Grenzdifferenz liefert. Die für den Tukey-Prozedur zugrundegelegte Verteilung der Mittelwertdifferenzen basiert auf den Quantilen der studentisierten Spannweiten-Verteilung $q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}}$: $\xi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}}$. Für $\alpha = 0{,}05$ sind Werte für $q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}}$ in der Tabelle 8.6[16] zu finden. Für die Grenzdifferenz der Tukey-Prozedur HSD_α (honestly significant difference) gilt somit:

$$GD_\alpha = \xi_\alpha * s_{Rest} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}} \quad : \quad \boxed{HSD_{\alpha;a} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}}$$

bzw. für $n_i = n_{i'} = n$ $\quad (\forall\, i, i': i \neq i')$

$$GD_\alpha = \xi_\alpha * s_{Rest} \sqrt{\frac{2}{n}} \quad : \quad \boxed{HSD_{\alpha;a} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{2}{n}} = q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n}} \;.$$

Papier und Bleistift

Mit
$a = 6$
$n_i = n = 8$
$s^2_{Rest} = 0{,}278$
$FG_{Rest} = N - a = 42$
$\alpha = 0{,}05$
$q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} = 4{,}222$ [SAS: `q=probmc("RANGE",.,1-0.05,42,6);`]

ergibt sich für die Grenzdifferenz der Tukey-Prozedur $HSD_{\alpha;a} = 0{,}787$.

Vergleich der paarweisen Mittelwertdifferenzen mit der Grenzdifferenz $HSD_{\alpha;a}$:

		M1	M2	M3	M4	M5	M6
		23,46	23,34	24,22	23,42	22,63	22,83
M1	23,46						
M2	23,34	-					
M3	24,22	-	*				
M4	23,42	-	-	*			
M5	22,63	*	-	*	*		
M6	22,83	-	-	*	-	-	

Die signifikanten Differenzen, die, die absolut größer sind als die Grenzdifferenz, sind mit * markiert.

[16] SAS-Programm:
```
proc iml;
   f = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,
        21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,40,50,60,80,100,150,200,32000};
   k = {2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 30 40 50};
   q = j(38,22,1);
   do i=1 to 38;
     do j=1 to 22;  q[i,j]=probmc("RANGE",.,1-0.05,f[i],k[j]);  end;
   end;
   a  =char(k);
   fg =char(f);
   print q [format=7.3 rowname=fg colname=a];
 quit;
```

(1-α)-Konfidenzintervalle:

Signifikanz liegt vor, wenn das Konfidenzintervall die Null nicht einschließt.

$\bar{y}_i$		$\bar{y}_{i'}$		$\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}$	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
M1	23,46	M2	23,34	0,12	-0,667	0,907	nicht signifikant
		M3	24,22	-0,76	-1,547	0,027	nicht signifikant
		M4	23,42	0,04	-0,747	0,827	nicht signifikant
		M5	22,63	0,83	0,043	1,617	signifikant
		M6	22,83	0,63	-0,157	1,417	nicht signifikant
M2	23,34	M3	24,22	-0,88	-1,667	-0,093	signifikant
		M4	23,42	-0,08	-0,867	0,707	nicht signifikant
		M5	22,63	0,71	-0,077	1,497	nicht signifikant
		M6	22,83	0,51	-0,277	1,297	nicht signifikant
M3	24,22	M4	23,42	0,80	0,013	1,587	signifikant
		M5	22,63	1,59	0,803	2,377	signifikant
		M6	22,83	1,39	0,603	2,177	signifikant
M4	23,42	M5	22,63	0,79	0,003	1,577	signifikant
		M6	22,83	0,59	-0,197	1,377	nicht signifikant
M5	22,63	M6	22,83	-0,20	-0,987	0,587	nicht signifikant

Methode der Verbindungslinien:

M5	M6	M2	M4	M1	M3
22,63	22,83	23,34	23,42	23,46	24,22

Signifikanzkennzeichnung mit gleichen Buchstaben:

M1	23,46		b	c
M2	23,34	a	b	
M3	24,22			c
M4	23,42		b	
M5	22,63	a		
M6	22,83	a	b	

SAS

Aufbauend auf die SAS-Datei `bsp84` mit dem Prüffaktor (Klassifikationsvariable) `mutante` und dem Prüfmerkmal `hof` lautet das SAS-Programm:

```
proc glm data=bsp84;
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
  means mutante/ tukey cldiff nosort;
  means mutante/ tukey lines;
run;
```

Die Vergleichsprozedur wird mit `tukey` angewiesen. Als Irrtumswahrscheinlichkeit wird, wenn nichts anderes angegeben, $\alpha = 0.05$ angenommen.

Das Ergebnis lautet ohne Varianztabelle und die doppelten paarweisen Vergleiche:

```
General Linear Models Procedure

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of Studentized Range= 4.222
Minimum Significant Difference= 0.7874

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                 Simultaneous              Simultaneous
                    Lower     Difference      Upper
   MUTANTE       Confidence    Between     Confidence
  Comparison        Limit       Means         Limit

M1   - M2        -0.6674      0.1200        0.9074
M1   - M3        -1.5474     -0.7600        0.0274
M1   - M4        -0.7474      0.0400        0.8274
M1   - M5         0.0426      0.8300        1.6174   ***
M1   - M6        -0.1586      0.6288        1.4161

M2   - M3        -1.6674     -0.8800       -0.0926   ***
M2   - M4        -0.8674     -0.0800        0.7074
M2   - M5        -0.0774      0.7100        1.4974
M2   - M6        -0.2786      0.5087        1.2961

M3   - M4         0.0126      0.8000        1.5874   ***
M3   - M5         0.8026      1.5900        2.3774   ***
M3   - M6         0.6014      1.3888        2.1761   ***

M4   - M5         0.0026      0.7900        1.5774   ***
M4   - M6        -0.1986      0.5888        1.3761

M5   - M6        -0.9886     -0.2012        0.5861

General Linear Models Procedure

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate,
      but generally has a higher type II error rate than REGWQ.

Alpha= 0.05  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of Studentized Range= 4.222
Minimum Significant Difference= 0.7874

Means with the same letter are not significantly different.

     Tukey Grouping             Mean       N  MUTANTE

                 A           24.2200       8  M3
                 A
          B      A           23.4600       8  M1
          B
          B                  23.4200       8  M4
          B
          B      C           23.3400       8  M2
          B      C
          B      C           22.8313       8  M6
                 C
                 C           22.6300       8  M5
```

Numerische Unterschiede resultieren aus der in SAS genutzten höheren Genauigkeit.

<u>Bemerkung:</u> Die Tukey-Prozedur wird häufig auch als Tukey-Kramer-Prozedur bezeichnet, weil die Erweiterung für ungleiche Stichprobengrößen auf Kramer zurück geht.

8.2.5.6 Dunnett-Prozedur

Von den a Stichproben ist eine Stichprobe eine vor dem Versuch festgelegte Bezugsvariante, die einen bestimmten Standard oder eine Kontrolle charakterisiert. Es soll jeder Mittelwert der k = a-1 Stichproben mit dieser Bezugsvariante verglichen werden, d. h. k = a - 1 Vergleiche sind durchzuführen. Schwierigkeiten können auftreten, wenn die Stichprobenumfänge der k zu vergleichenden Stufen des Prüffaktors ungleich groß sind. Deshalb soll hier zunächst nur der Fall $n_i = n$ für alle i = 1, 2, ..., a-1 = k betrachtet werden.

Aufgrund der eingeschränkten Fragestellung für den Vergleich der Mittelwerte mit dem Mittelwert der Bezugsvariante kann die Alternativhypothese eine einseitige oder zweiseitige Fragestellung umfassen, d. h.

$H_0^i : \mu_i = \mu_0$ für alle i = 1, 2, ..., a-1 ; μ_0 : Bezugsvariante

$H_A^i : \mu_i \neq \mu_0$ (i = 1, 2, ..., a-1) [zweiseitige Fragestellung]

$H_A^i : \mu_i < \mu_0$ (i = 1, 2, ..., a-1) [einseitige Fragestellung]

$H_A^i : \mu_i > \mu_0$ (i = 1, 2, ..., a-1) [einseitige Fragestellung] .

Die für die Dunnett-Prozedur zugrunde gelegte Verteilung der Prüfgröße $|d|_{1-\alpha;\,k,\,FG}$ (einseitig) bzw. $|d|_{1-\alpha/2;\,k,\,FG}$ (zweiseitig) ist für $\alpha = 0.05$ in der Tabelle 8.7[17] aufgeführt.

Mit $\xi_\alpha = |d|_{1-\alpha;k,FG_{Rest}}$ bzw. $\xi_\alpha = |d|_{1-\alpha/2;k,FG_{Rest}}$ berechnet sich die Grenzdifferenz der Dunnett-Prozedur DSD_α (Dunnett's significant difference):

für die einseitige Fragestellung

$$GD_\alpha = \xi_\alpha * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}} \quad : \quad \boxed{DSD_{\alpha;k} = |d|_{1-\alpha;k,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}}$$

und für die zweiseitige Fragestellung

$$\boxed{DSD_{\alpha;k} = |d|_{1-\alpha/2;k,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}} \quad .$$

Papier und Bleistift

Angenommen, die Mutante M3 des betrachteten Beispiels sei ein langjähriger Standard und mit dem Versuch solle geprüft werden, welche Mutanten signifikant schlechter als dieser Standard sind. Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei für diese einseitige Fragestellung mit α = 0,05 festgelegt worden.

---

[17] SAS-Programm:

```
proc iml;
   f = {5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,
        25,30,40,50,60,80,100,150,200,32000};
   kk= {1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 20};
   d2= j(26,16,1);
   do i=1 to 26;
     do j=1 to 16;
        d2[i,j]=probmc("DUNNETT2",.,1-0.05,f[i],kk[j]);   ! "DUNNETT1" für die einseitige Fragestellung
     end;
   end;
   k  =char(kk);
   fg =char(f);
   print d2 [format=7.3 rowname=fg colname=k];
 quit;
```

Tabelle 8.7 a: Signifikanzschwellen der Prüfgröße der zweiseitigen Dunnett-Prozedur $|d|_{1-\alpha/2;\,k,\,FG}$ für $\alpha = 0{,}05$
k = a-1 : Anzahl der Vergleiche zu Bezugsvariante (Standard oder Kontrolle), FG: Freiheitsgrade des Restes

k / FG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
5	2.571	3.030	3.293	3.476	3.615	3.727	3.821	3.900	3.970	4.032	4.087	4.137	4.183	4.225	4.264	4.424
6	2.447	2.863	3.099	3.263	3.388	3.489	3.573	3.644	3.707	3.762	3.812	3.857	3.898	3.936	3.971	4.115
7	2.364	2.752	2.971	3.123	3.239	3.332	3.409	3.476	3.534	3.585	3.631	3.673	3.711	3.746	3.778	3.911
8	2.306	2.673	2.880	3.023	3.132	3.219	3.292	3.354	3.409	3.457	3.500	3.539	3.575	3.608	3.638	3.763
9	2.262	2.614	2.812	2.948	3.052	3.135	3.205	3.264	3.316	3.362	3.403	3.440	3.474	3.506	3.535	3.653
10	2.228	2.568	2.759	2.891	2.990	3.070	3.137	3.194	3.244	3.288	3.328	3.364	3.396	3.427	3.454	3.569
11	2.201	2.532	2.717	2.845	2.941	3.019	3.084	3.139	3.187	3.230	3.268	3.303	3.334	3.363	3.390	3.501
12	2.179	2.502	2.683	2.807	2.901	2.977	3.040	3.094	3.141	3.182	3.220	3.253	3.284	3.312	3.339	3.446
13	2.160	2.478	2.655	2.776	2.868	2.942	3.004	3.056	3.102	3.143	3.179	3.212	3.242	3.270	3.295	3.400
14	2.145	2.457	2.631	2.750	2.840	2.913	2.973	3.024	3.069	3.109	3.145	3.177	3.206	3.233	3.259	3.361
15	2.132	2.439	2.610	2.727	2.816	2.887	2.947	2.997	3.041	3.080	3.115	3.147	3.176	3.203	3.227	3.328
16	2.120	2.424	2.592	2.708	2.796	2.866	2.924	2.974	3.017	3.056	3.090	3.121	3.150	3.176	3.200	3.299
17	2.110	2.410	2.577	2.691	2.777	2.847	2.904	2.953	2.996	3.034	3.068	3.099	3.127	3.153	3.176	3.274
18	2.101	2.399	2.563	2.676	2.762	2.830	2.887	2.935	2.977	3.015	3.048	3.079	3.107	3.132	3.156	3.252
19	2.093	2.388	2.551	2.663	2.747	2.815	2.871	2.919	2.961	2.998	3.031	3.061	3.089	3.114	3.137	3.233
20	2.086	2.379	2.540	2.651	2.735	2.802	2.857	2.905	2.946	2.983	3.016	3.045	3.073	3.098	3.121	3.215
25	2.060	2.344	2.500	2.607	2.688	2.752	2.806	2.852	2.891	2.927	2.958	2.987	3.013	3.037	3.059	3.150
30	2.042	2.321	2.474	2.578	2.657	2.720	2.772	2.817	2.856	2.890	2.921	2.949	2.974	2.997	3.019	3.107
40	2.021	2.293	2.441	2.543	2.619	2.680	2.731	2.774	2.812	2.845	2.875	2.902	2.926	2.949	2.970	3.055
50	2.009	2.276	2.422	2.522	2.597	2.657	2.707	2.749	2.786	2.819	2.848	2.874	2.898	2.920	2.941	3.024
60	2.000	2.265	2.410	2.508	2.582	2.642	2.691	2.733	2.769	2.801	2.830	2.856	2.880	2.901	2.922	3.004
80	1.990	2.252	2.394	2.491	2.564	2.623	2.671	2.712	2.748	2.780	2.808	2.833	2.857	2.878	2.898	2.979
100	1.984	2.244	2.385	2.481	2.554	2.611	2.659	2.700	2.735	2.767	2.795	2.820	2.843	2.864	2.884	2.964
150	1.976	2.233	2.373	2.468	2.539	2.596	2.644	2.684	2.719	2.750	2.777	2.802	2.825	2.846	2.865	2.944
200	1.972	2.228	2.367	2.461	2.532	2.589	2.636	2.676	2.711	2.741	2.769	2.794	2.816	2.837	2.856	2.935
∞	1.960	2.212	2.349	2.442	2.512	2.567	2.613	2.652	2.686	2.716	2.743	2.768	2.790	2.810	2.829	2.906

Tabelle 8.7 b: Signifikanzschwellen der Prüfgröße der einseitigen Dunnett-Prozedur $|d|_{1-\alpha;\,k,\,FG}$ für $\alpha = 0{,}05$
(bzw. $\alpha = 0.10$, zweiseitig)
k = a-1 : Anzahl der Vergleiche zu Bezugsvariante (Standard oder Kontrolle), FG: Freiheitsgrade des Restes

k / FG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
5	2.015	2.440	2.681	2.848	2.976	3.078	3.163	3.236	3.300	3.356	3.407	3.453	3.494	3.533	3.569	3.715
6	1.943	2.337	2.558	2.711	2.827	2.920	2.998	3.064	3.122	3.174	3.220	3.261	3.299	3.334	3.367	3.499
7	1.895	2.267	2.475	2.619	2.728	2.815	2.888	2.950	3.004	3.052	3.095	3.134	3.169	3.202	3.232	3.356
8	1.859	2.217	2.416	2.553	2.657	2.740	2.809	2.868	2.919	2.965	3.006	3.043	3.076	3.107	3.136	3.254
9	1.833	2.180	2.372	2.504	2.604	2.683	2.750	2.807	2.856	2.900	2.939	2.974	3.007	3.036	3.064	3.177
10	1.812	2.151	2.338	2.466	2.562	2.640	2.704	2.759	2.807	2.849	2.887	2.921	2.953	2.981	3.008	3.117
11	1.796	2.127	2.310	2.435	2.529	2.605	2.667	2.721	2.768	2.809	2.846	2.879	2.910	2.938	2.963	3.070
12	1.782	2.108	2.287	2.410	2.502	2.576	2.637	2.690	2.735	2.776	2.812	2.845	2.874	2.902	2.927	3.031
13	1.771	2.092	2.269	2.389	2.480	2.552	2.613	2.664	2.709	2.748	2.784	2.816	2.845	2.872	2.897	2.998
14	1.761	2.079	2.253	2.371	2.461	2.532	2.592	2.642	2.686	2.725	2.760	2.791	2.820	2.847	2.871	2.971
15	1.753	2.067	2.239	2.356	2.444	2.515	2.573	2.623	2.667	2.705	2.740	2.771	2.799	2.825	2.849	2.948
16	1.746	2.057	2.227	2.343	2.430	2.500	2.558	2.607	2.650	2.688	2.722	2.753	2.781	2.806	2.830	2.927
17	1.740	2.048	2.217	2.332	2.418	2.487	2.544	2.593	2.635	2.673	2.706	2.737	2.764	2.790	2.813	2.909
18	1.734	2.040	2.208	2.321	2.407	2.475	2.532	2.580	2.622	2.660	2.693	2.723	2.750	2.775	2.799	2.894
19	1.729	2.034	2.200	2.312	2.397	2.465	2.521	2.569	2.611	2.648	2.681	2.711	2.738	2.763	2.786	2.880
20	1.725	2.027	2.192	2.304	2.389	2.456	2.512	2.559	2.601	2.637	2.670	2.700	2.726	2.751	2.774	2.868
25	1.708	2.004	2.165	2.274	2.356	2.422	2.476	2.522	2.562	2.598	2.630	2.658	2.684	2.708	2.730	2.821
30	1.697	1.989	2.147	2.255	2.335	2.399	2.453	2.498	2.537	2.572	2.603	2.631	2.657	2.680	2.702	2.790
40	1.684	1.970	2.125	2.230	2.309	2.372	2.424	2.468	2.506	2.540	2.570	2.598	2.623	2.646	2.667	2.753
50	1.676	1.959	2.112	2.216	2.294	2.356	2.407	2.450	2.488	2.521	2.551	2.578	2.603	2.625	2.646	2.731
60	1.671	1.952	2.104	2.207	2.284	2.345	2.395	2.439	2.476	2.509	2.538	2.565	2.589	2.612	2.632	2.716
80	1.664	1.943	2.093	2.195	2.271	2.331	2.381	2.424	2.461	2.494	2.523	2.549	2.573	2.595	2.615	2.698
100	1.660	1.938	2.087	2.188	2.263	2.324	2.373	2.415	2.452	2.484	2.513	2.539	2.563	2.585	2.605	2.687
150	1.655	1.930	2.079	2.179	2.253	2.313	2.362	2.404	2.440	2.472	2.501	2.527	2.550	2.572	2.592	2.673
200	1.653	1.927	2.074	2.174	2.249	2.308	2.357	2.398	2.434	2.466	2.495	2.520	2.544	2.565	2.585	2.666
∞	1.645	1.916	2.062	2.160	2.234	2.292	2.341	2.382	2.417	2.448	2.477	2.502	2.525	2.546	2.565	2.645

Mit $k = a - 1 \quad = 5$
$n_i = n \quad = 8$
$s^2_{Rest} \quad = 0{,}278$
$FG_{Rest} \quad = N - a = 42$
$\alpha \quad = 0{,}05$
$|d|_{1-\alpha;\,k,\,FG} \quad = 2{,}305$ [SAS: `d=probmc("DUNNETT1",.,1-0.05,42,5);`]

ergibt sich für die Grenzdifferenz der Dunnett-Prozedur $DSD_{\alpha;\,k} = 0{,}608$.

Vergleich der paarweisen Mittelwertdifferenzen mit der Grenzdifferenz $DSD_{\alpha;\,k}$:

		M3 24,22	Test
M1	23,46	-0,76	signifikant
M2	23,34	-0,88	signifikant
M3	24,22	= = =	= = =
M4	23,42	-0,80	signifikant
M5	22,63	-1,59	signifikant
M6	22,83	-1,39	signifikant

Alle Mittelwertdifferenzen zum Standard sind negativ, d. h. der Durchmesser der Hemmhöfe ist im Mittel kleiner als der des Standards. Und die Differenzen sind signifikant von Null verschieden: die Penicillinproduktion der Mutanten M1, M2, M4, M5 und M6 ist für die angenommene Versuchsfrage signifikant schlechter als der Standard.

(1-α)-Konfidenzintervalle:

Signifikanz liegt vor, wenn das Konfidenzintervall die Null nicht einschließt.

		M3	(1-α)-Konfidenzintervall		Test
		24,22	untere Grenze	obere Grenze	
M1	23,46	-0,76	-1,368	-0,152	signifikant
M2	23,34	-0,88	-1,488	-0,272	signifikant
M3	24,22	= = =			
M4	23,42	-0,80	-1,408	-0,192	signifikant
M5	22,63	-1,59	-2,198	-0,982	signifikant
M6	22,83	-1,39	-1,998	-0,782	signifikant

SAS

Zugrunde gelegt wird die SAS-Datei `bsp84` mit dem Prüffaktor (Klassifikationsvariable) `mutante` und dem Prüfmerkmal `hof` :

```
proc glm data=bsp84
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
  means mutante/ dunnettl('M3') cldiff;
run;
```

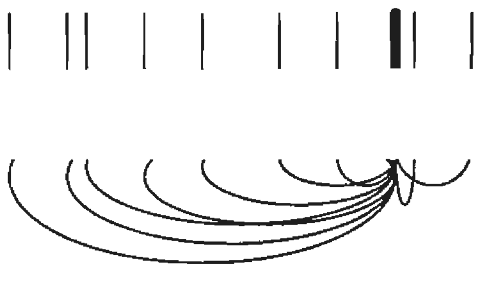
dunnettl : einseitige Fragestellung, ob die zu vergleichende Variante im Mittel kleiner als der Standard ist.
dunnettu : einseitige Fragestellung, ob die zu vergleichende Variante im Mittel größer als der Standard ist.
dunnett : zweiseitige Fragestellung
die Bezugsvariante (Standard, Kontrolle) wird in Klammern gesetzt [Anführungszeichen beachten!]

Im Output steht neben der Ausgabe der Varianztabelle:

```
General Linear Models Procedure

Dunnett's One-tailed T tests for variable: HOF

NOTE: This tests controls the type I experimentwise error for
      comparisons of all treatments against a control.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of Dunnett's T= 2.305
Minimum Significant Difference= 0.6081

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                Simultaneous                Simultaneous
                   Lower     Difference        Upper
  MUTANTE       Confidence    Between       Confidence
 Comparison        Limit        Means          Limit

M1   - M3        -1.3681      -0.7600        -0.1519    ***
M4   - M3        -1.4081      -0.8000        -0.1919    ***
M2   - M3        -1.4881      -0.8800        -0.2719    ***
M6   - M3        -1.9968      -1.3888        -0.7807    ***
M5   - M3        -2.1981      -1.5900        -0.9819    ***
```

Angenommen, es seien neun „Behandlungen" mit einem Standard zu vergleichen. Die Mittelwerte der Stufen des Prüffaktors sind wie auf dem Zahlenstrahl in der Abb. 8.9 abgetragen, wobei der Standard dicker dargestellt ist. Die neun Einzelvergleiche sind sichtbar gemacht. Was passiert, wenn der 2. Mittelwert nicht präzise geschätzt wird? Der Einzelvergleich mit diesem Mittelwert kann nicht korrekt ausfallen. Wenn nun aber der Mittelwert des Standards nicht präzise geschätzt wird, sind alle neun Einzelvergleiche von geringem Wert. Das bedeutet, daß an den Standard, die Bezugsvariante, eine wesentlich höhere Anforderung gestellt werden muß als an die anderen Stufen des Prüffaktors: der Standard muß so „stabil" sein, daß er alle anderen Vergleiche „aushalten" kann.

Abb. 8.9 : Zur Veranschaulichung der Versuchsplanung bei der Dunnett-Prozedur



Aus diesem Grunde besagt die Versuchsplanung, den Standard verstärkt zu wiederholen. Als optimal gezeigt hat sich dabei der Zusammenhang

$$n_{Standard} = \sqrt{k} * n_{Behandlung} \quad ,$$

wobei k = a-1 die Anzahl der mit dem Standard zu vergleichenden Stufen des Prüffaktors ist.

Im Beispiel 8.4 ist $n_{Behandlung} = 8$ und $k = 5$ Stufen sind mit einem Standard zu vergleichen. Der optimale Stichprobenumfang für den Standard, die Bezugsvariante, wäre folglich

$$n_{Standard} = \sqrt{5} * 8 \quad = 17{,}89 \approx 18 \ .$$

Bei einem so geplanten und durchgeführten Versuch treten ungleiche Stichprobenumfänge auf! Es gilt approximativ (i = 1, 2, ..., k = a-1)

für die einseitige Fragestellung

$$\boxed{DSD_{\alpha;k} = |d|_{1-\alpha;k,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{Standard}}}}$$

und für die zweiseitige Fragestellung

$$\boxed{DSD_{\alpha;k} = |d|_{1-\alpha/2;k,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{Standard}}}} \quad .$$

Auf den Fall, daß die „Behandlungen" unterschiedliche Stichprobenumfänge haben, wird hier nicht eingegangen.

8.2.5.7 Maximum-Modulus-Prozedur

Eine Prozedur mit sehr eingeschränkter Zielstellung ist die Maximum-Modulus-Prozedur. Alle Mittelwerte der a Stufen des Prüffaktors werden jeweils mit dem Versuchsmittelwert verglichen. Eine solche Zielstellung liegt beispielsweise dann vor, wenn eine „Ausgewogenheit" aller Stufen des Prüffaktors aufgezeigt werden soll.

Wie bei der Dunnett-Prozedur kann die Alternativhypothese eine einseitige oder zweiseitige Fragestellung umfassen, d. h.

$H_0^i : \mu_i = \mu$ für alle i = 1, 2, ..., a ; μ : Erwartungswert des Versuches

$H_A^i : \mu_i \neq \mu$ (i = 1, 2, ..., a) [zweiseitige Fragestellung]

$H_A^i : \mu_i < \mu$ (i = 1, 2, ..., a) [einseitige Fragestellung]

$H_A^i : \mu_i > \mu$ (i = 1, 2, ..., a) [einseitige Fragestellung] .

Die zugrunde gelegte Verteilung der Mittelwertdifferenzen sind die Quantile der studentisierten Maximum-Modulus-Verteilung $|M|_{1-\alpha;\, a,\, FG}$ (einseitig) bzw. $|M|_{1-\alpha/2;\, a,\, FG}$ (zweiseitig). Für α = 0.05 ist sie in der Tabelle 8.8[18] angegeben.

Mit $\xi_\alpha = |M|_{1-\alpha;a,FG_{Rest}}$ bzw. $\xi_\alpha = |M|_{1-\alpha/2;a,FG_{Rest}}$ berechnet sich die Grenzdifferenz der Maximum-Modulus-Prozedur MSD_α:

[18] SAS-Programm:
```
proc iml;
  f = {5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,25,30,40,50,60,80,100,150,200,32000};
  k = {1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 20};
  m1= j(26,16,1);
  m2= m1;
  do i=1 to 26;
    do j=1 to 16;
      m1[i,j]=probmc("MAXMOD",.,1-0.05,f[i],k[j]);
      m2[i,j]=probmc("MAXMOD",.,1-0.10,f[i],k[j]);
    end;
  end;
  a  =char(k);
  fg =char(f);
  print m1 [format=7.3 rowname=fg colname=a], m2 [format=7.3 rowname=fg colname=a];
quit;
```

Tabelle 8.8 a: Signifikanzschwellen der Prüfgröße der zweiseitigen Maximum-Modulus-Prozedur $|M|_{1-\alpha/2;\, a,\, FG}$ für $\alpha = 0{,}05$
a : Anzahl der Stichproben (Stufen des Prüffaktors), FG: Freiheitsgrade des Restes

a / FG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
5	2.571	3.090	3.399	3.619	3.789	3.928	4.044	4.145	4.233	4.312	4.382	4.447	4.506	4.560	4.610	4.818
6	2.447	2.916	3.193	3.389	3.541	3.664	3.769	3.858	3.937	4.008	4.071	4.128	4.181	4.230	4.275	4.462
7	2.364	2.800	3.056	3.236	3.376	3.489	3.585	3.667	3.739	3.803	3.860	3.913	3.961	4.005	4.046	4.213
8	2.306	2.718	2.958	3.128	3.258	3.365	3.454	3.531	3.599	3.659	3.713	3.763	3.808	3.850	3.888	4.048
9	2.262	2.657	2.885	3.046	3.171	3.272	3.356	3.430	3.494	3.551	3.603	3.650	3.693	3.733	3.769	3.922
10	2.228	2.609	2.829	2.983	3.103	3.199	3.281	3.351	3.412	3.467	3.517	3.562	3.603	3.641	3.676	3.822
11	2.201	2.571	2.784	2.933	3.048	3.142	3.220	3.288	3.347	3.400	3.448	3.491	3.531	3.568	3.602	3.743
12	2.179	2.540	2.747	2.892	3.004	3.095	3.171	3.236	3.294	3.345	3.391	3.433	3.471	3.507	3.540	3.676
13	2.160	2.515	2.717	2.858	2.967	3.055	3.129	3.193	3.249	3.299	3.344	3.385	3.422	3.457	3.489	3.621
14	2.145	2.493	2.691	2.830	2.936	3.022	3.095	3.157	3.212	3.260	3.304	3.344	3.381	3.414	3.446	3.575
15	2.132	2.474	2.669	2.805	2.909	2.994	3.065	3.126	3.180	3.227	3.270	3.309	3.345	3.378	3.409	3.535
16	2.120	2.458	2.650	2.784	2.886	2.969	3.039	3.099	3.152	3.198	3.241	3.279	3.314	3.347	3.377	3.501
17	2.110	2.444	2.633	2.765	2.866	2.948	3.017	3.076	3.127	3.173	3.215	3.253	3.287	3.319	3.349	3.471
18	2.101	2.432	2.619	2.749	2.849	2.929	2.997	3.055	3.106	3.151	3.192	3.229	3.263	3.295	3.324	3.444
19	2.093	2.421	2.606	2.734	2.833	2.912	2.979	3.036	3.087	3.132	3.172	3.208	3.242	3.273	3.302	3.420
20	2.086	2.411	2.594	2.721	2.819	2.897	2.963	3.020	3.070	3.114	3.154	3.190	3.223	3.254	3.282	3.399
25	2.060	2.374	2.551	2.673	2.766	2.841	2.904	2.959	3.006	3.048	3.086	3.120	3.152	3.181	3.208	3.319
30	2.042	2.350	2.522	2.641	2.732	2.805	2.866	2.918	2.964	3.005	3.042	3.075	3.105	3.133	3.160	3.267
40	2.021	2.321	2.488	2.602	2.690	2.760	2.819	2.869	2.913	2.952	2.987	3.019	3.048	3.075	3.100	3.203
50	2.009	2.304	2.467	2.580	2.665	2.734	2.791	2.840	2.883	2.921	2.955	2.986	3.014	3.040	3.065	3.164
60	2.000	2.292	2.454	2.565	2.649	2.716	2.772	2.821	2.863	2.900	2.934	2.964	2.992	3.018	3.041	3.139
80	1.990	2.278	2.437	2.546	2.628	2.695	2.750	2.797	2.838	2.875	2.907	2.937	2.964	2.989	3.013	3.108
100	1.984	2.270	2.427	2.535	2.616	2.682	2.736	2.783	2.823	2.859	2.892	2.921	2.948	2.973	2.995	3.089
150	1.976	2.258	2.414	2.520	2.600	2.665	2.718	2.764	2.804	2.839	2.871	2.900	2.926	2.950	2.973	3.065
200	1.972	2.253	2.407	2.513	2.592	2.656	2.709	2.755	2.794	2.829	2.861	2.889	2.915	2.939	2.961	3.052
∞	1.960	2.237	2.388	2.491	2.569	2.631	2.683	2.727	2.766	2.800	2.830	2.858	2.883	2.907	2.928	3.016

Tabelle 8.8 b: Signifikanzschwellen der Prüfgröße der einseitigen Maximum-Modulus-Prozedur $|M|_{1-\alpha;\, a,\, FG}$ für $\alpha = 0{,}05$
(bzw. $\alpha = 0.10$, zweiseitig)
a : Anzahl der Stichproben (Stufen des Prüffaktors), FG: Freiheitsgrade des Restes

a / FG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20
5	2.015	2.491	2.769	2.965	3.116	3.238	3.341	3.430	3.507	3.576	3.638	3.694	3.746	3.793	3.837	4.018
6	1.943	2.385	2.641	2.822	2.961	3.073	3.168	3.249	3.320	3.384	3.441	3.492	3.540	3.583	3.624	3.790
7	1.895	2.314	2.556	2.725	2.856	2.961	3.050	3.126	3.193	3.252	3.306	3.354	3.399	3.439	3.477	3.634
8	1.860	2.262	2.494	2.656	2.780	2.880	2.965	3.038	3.101	3.158	3.209	3.255	3.297	3.336	3.373	3.522
9	1.833	2.224	2.447	2.603	2.723	2.819	2.901	2.970	3.031	3.086	3.135	3.179	3.220	3.258	3.292	3.436
10	1.813	2.193	2.410	2.562	2.678	2.771	2.850	2.918	2.977	3.029	3.077	3.120	3.159	3.195	3.229	3.368
11	1.796	2.169	2.381	2.529	2.642	2.733	2.809	2.875	2.933	2.984	3.030	3.072	3.110	3.145	3.178	3.313
12	1.782	2.149	2.357	2.501	2.612	2.701	2.776	2.840	2.896	2.946	2.991	3.032	3.069	3.104	3.135	3.267
13	1.771	2.133	2.337	2.479	2.587	2.675	2.748	2.811	2.866	2.915	2.959	2.999	3.035	3.069	3.100	3.229
14	1.761	2.119	2.320	2.460	2.566	2.652	2.724	2.786	2.840	2.888	2.932	2.971	3.007	3.040	3.071	3.197
15	1.753	2.107	2.305	2.443	2.548	2.633	2.704	2.765	2.818	2.865	2.908	2.947	2.982	3.015	3.045	3.169
16	1.746	2.096	2.293	2.429	2.532	2.616	2.686	2.746	2.799	2.845	2.887	2.925	2.960	2.993	3.022	3.145
17	1.740	2.087	2.282	2.416	2.519	2.601	2.671	2.730	2.782	2.828	2.869	2.907	2.941	2.973	3.003	3.124
18	1.734	2.079	2.272	2.405	2.507	2.588	2.657	2.716	2.767	2.812	2.853	2.891	2.925	2.956	2.985	3.105
19	1.729	2.072	2.263	2.395	2.496	2.577	2.645	2.703	2.754	2.799	2.839	2.876	2.910	2.941	2.969	3.088
20	1.725	2.065	2.255	2.386	2.486	2.567	2.634	2.691	2.742	2.786	2.826	2.863	2.896	2.927	2.956	3.073
25	1.708	2.041	2.226	2.353	2.450	2.528	2.592	2.648	2.697	2.740	2.778	2.814	2.846	2.875	2.903	3.016
30	1.697	2.025	2.207	2.331	2.426	2.502	2.565	2.620	2.667	2.709	2.747	2.781	2.812	2.841	2.868	2.978
40	1.684	2.006	2.183	2.305	2.397	2.470	2.532	2.584	2.630	2.671	2.708	2.741	2.771	2.799	2.825	2.931
50	1.676	1.994	2.169	2.289	2.379	2.452	2.512	2.564	2.609	2.648	2.684	2.717	2.746	2.774	2.799	2.903
60	1.671	1.986	2.160	2.278	2.367	2.439	2.499	2.550	2.594	2.633	2.669	2.701	2.730	2.757	2.782	2.884
80	1.664	1.977	2.148	2.265	2.353	2.424	2.482	2.532	2.576	2.615	2.649	2.681	2.710	2.736	2.760	2.860
100	1.660	1.971	2.141	2.257	2.345	2.414	2.473	2.522	2.565	2.604	2.638	2.669	2.697	2.723	2.748	2.847
150	1.655	1.964	2.132	2.247	2.333	2.402	2.460	2.509	2.551	2.589	2.623	2.653	2.681	2.707	2.731	2.828
200	1.653	1.960	2.128	2.242	2.328	2.396	2.453	2.502	2.544	2.582	2.615	2.645	2.673	2.699	2.722	2.819
∞	1.645	1.949	2.114	2.226	2.311	2.378	2.434	2.482	2.523	2.560	2.592	2.622	2.649	2.674	2.697	2.791

für die einseitige Fragestellung

$$MSD_{\alpha;a} = |M|_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{N-n_i}{N*n_i}}$$

bzw. für $n_i = n_{i'} = n$ ($\forall$ i, i': i≠i')

$$MSD_{\alpha;a} = |M|_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{N}}$$

und für die zweiseitige Fragestellung

$$MSD_{\alpha;a} = |M|_{1-\alpha/2;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{N-n_i}{N*n_i}}$$

bzw. für $n_i = n_{i'} = n$ ($\forall$ i, i': i≠i')

$$MSD_{\alpha;a} = |M|_{1-\alpha/2;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{N}} \quad ,$$

mit

$$N = \sum_i n_i \quad .$$

Papier und Bleistift

Die Zielstellung ist, die Maximum-Modulus-Prozedur einzusetzen. Deshalb wird für das Beispiel 8.4 eine Aufgabenstellung dahingehend konstruiert:
Geprüft werden soll, welche Mutanten sich hinsichtlich ihres mittleren Hemmhofdurchmessers vom Versuchsmittelwert signifikant unterscheiden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit wird mit α = 0,05 (zweiseitig) festgelegt.

Mit $a = 6$
$n_i = n = 8$
$N = 48$
$s^2_{Rest} = 0{,}278$
$FG_{Rest} = N - a = 42$
$\alpha = 0{,}05$
$|M|_{1-\alpha/2;\,a,\,FG} = 2.754$ [SAS: `d=probmc("MAXMOD",.,1-0.05,42,6);`]

ergibt sich für die Grenzdifferenz der Maximum-Modulus-Prozedur $MSD_{\alpha;\,a} = 0{,}555$.

Vergleich der paarweisen Mittelwertdifferenzen mit der Grenzdifferenz $MSD_{\alpha;\,a}$:

		Gesamtmittelwert 23,317	Test
M1	23,46	0,143	nicht signifikant
M2	23,34	0,023	nicht signifikant
M3	24,22	0,903	signifikant
M4	23,42	0,103	nicht signifikant
M5	22,63	-0,687	signifikant
M6	22,83	-0,487	nicht signifikant

Die Mutanten M3 und M5 unterscheiden sich in ihrer mittleren Wirkung, dem Durchmesser der Hemmhöfe, signifikant von Gesamtmittelwert des Versuches, weil deren paarweisen Differenzen zum Gesamtmittel größer als die Grenzdifferenz $MSD_{\alpha;\,a}$ sind.

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle:

Signifikanz liegt vor, wenn das Konfidenzintervall die Null nicht einschließt.

		Gesamtmittelwert 23,317	$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
M1	23,46	0,143	-0,412	0,698	nicht signifikant
M2	23,34	0,023	-0,532	0,578	nicht signifikant
M3	24,22	0,903	0,348	1,458	signifikant
M4	23,42	0,103	-0,452	0,658	nicht signifikant
M5	22,63	-0,687	-1,242	-0,132	signifikant
M6	22,83	-0,487	-1,042	0,068	nicht signifikant

Eine automatische Realisierung der Maximum-Modulus-Prozedur ist in SAS nicht gegeben. Allerdings kann mit Kenntnis der Quantile der studentisierten Maximum-Modulus-Verteilung diese Prozedur sowohl in SAS als auch in EXCEL umgesetzt werden.

8.2.5.8 Scheffé-Prozedur

Die Scheffé-Prozedur prüft aus den Mittelwerten entsprechend der Zielstellung des Versuches berechnete Kontraste. Was sind Kontraste? Lineare Kontraste ψ_i sind Linearkombinationen aus den Mittelwerten derart, daß $\psi_i = \sum_{i=1}^{a} c_i * \mu_i$, wobei für die Konstanten c_i gilt: $\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$.

Natürlich können auch mit Hilfe der Scheffé-Prozedur solche Nullhypothesen wie

$H_0^{i,i'}: \mu_i = \mu_{i'}$ bzw. $\mu_i - \mu_{i'} = 0$ für alle i, i' = 1, 2, ..., a : i > i' ($c_i = 1, c_{i'} = -1$)

getestet werden. Das betrifft dann den Vergleich der einfachen Mittelwertdifferenzen, der Einzelhypothesen. Einige der Einzelhypothesen lauten als Kontraste geschrieben:

$H_0^1: \mu_1 = \mu_2 \rightarrow \quad 1 * \mu_1 - 1 * \mu_2 = 0$ $\qquad c_1 = 1, c_2 = -1; c_i = 0, i \neq 1, 2$

$H_0^2: \mu_1 = \mu_3 \rightarrow \quad 1 * \mu_1 + 0 * \mu_2 - 1 * \mu_3 = 0$ $\qquad c_1 = 1, c_3 = -1; c_i = 0, i \neq 1, 3$

$H_0^3: \mu_1 = \mu_5 \rightarrow \quad 1 * \mu_1 + 0 * \mu_2 + 0 * \mu_3 + 0 * \mu_4 - 1 * \mu_5 = 0$ $\qquad c_1 = 1, c_5 = -1; c_i = 0, i \neq 1, 5$.

In Abhängigkeit von der Zielstellung des Versuches ist es möglich, beliebige Kontraste zu formulieren, beispielsweise

$H_0^4: 0 * \mu_1 + 0{,}5 * \mu_2 + 0{,}5 * \mu_3 + 0 * \mu_4 + 0 * \mu_5 - 1 * \mu_6 = 0$ $\qquad c_2=c_3=0{,}5,\ c_6=-1;\ c_i=0,\ i \neq 2, 3, 6$

oder

$H_0^5: 0{,}5\,\mu_5 + 0{,}5\mu_6 - 0{,}25\mu_1 - 0{,}25\mu_2 - 0{,}25\mu_3 - 0{,}25\mu_4 = 0$ $\qquad c_1=c_2=c_3=c_4=0{,}25,\ c_5=c_6=0{,}5; c_i=0,\ i \neq 1,2,...,6.$

Als Verteilung der Kontraste wird die F-Verteilung herangezogen. Die Grenzdifferenz der Scheffé-Prozedur $FSD_{\alpha;a}$ (fully significant difference) wird bei ungleich großen Stichprobenumfängen für Kontraste aus zwei Mittelwerten berechnet mit

$$\boxed{FSD_{\alpha;a} = \sqrt{(a-1) * F_{1-\alpha;a-1,FG_{Rest}} * s^2_{Rest} * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}$$.

Bei gleich großem Stichprobenumfang n ist die Grenzdifferenz der Scheffé-Prozedur für Kontraste aus zwei oder mehreren Mittelwerten

$$\boxed{FSD_{\alpha;a} = \sqrt{(a-1) * F_{1-\alpha;a-1,FG_{Rest}} * s^2_{Rest} * \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{a} c_i^2}}\quad .$$

Die Scheffé-Prozedur ist zum Testen von Kontrasten aus mehreren Mittelwerten auf versuchsbezogenem (multiplen) Signifikanzniveau gedacht. Für den Vergleich der Einzelhypothesen, dem paarweisen Vergleich zweier Mittelwerte, hat die Scheffé-Prozedur eine geringere Güte als die Tukey-Prozedur. Deshalb sollte die Scheffé-Prozedur für den paarweisen Vergleich von Mittelwerten nicht herangezogen werden.

Papier und Bleistift

Die fünf oben genannten Hypothesen sollen anhand der Daten des Beispiels 8.4 ohne Bezug zu einer konkreten Aufgabenstellung (!) getestet werden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit wird mit $\alpha = 0{,}05$ gewählt. Mit

a	$= 6$	s^2_{Rest}	$= 0{,}278$
$n_i = n$	$= 8$	FG_{Rest}	$= N - a = 42$
		α	$= 0{,}05$
$F_{1-\alpha;\,5,\,42}$	$= 2.438$	[Tab. 8.4 - SAS: `f=finv(0.95,5,42);`]	

hat für die Hypothesen H_0^1, H_0^2 und H_0^3 zu den drei einfachen Mittelwertdifferenzen die Grenzdifferenz der Scheffé-Prozedur den Wert

$$FSD^{(1,2,3)}_{\alpha;a} = \sqrt{5 * 2{,}438 * 0{,}278 * \frac{1}{8} * \left(1^2 + (-1)^2\right)} = 0{,}920 \,.$$

Für die Hypothesen 4 und 5 sind die Grenzdifferenzen

$$FSD^{(4)}_{\alpha;a} = \sqrt{5 * 2{,}438 * 0{,}278 * \frac{1}{8} * \left(0{,}5^2 + 0{,}5^2 + (-1)^2\right)} = 0{,}797$$

und

$$FSD^{(5)}_{\alpha;a} = \sqrt{5 * 2{,}438 * 0{,}278 * \frac{1}{8} * \left((-0{,}25)^2 + (-0{,}25)^2 + (-0{,}25)^2 + (-0{,}25)^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2\right)} = 0{,}564 \quad .$$

Vergleich der Kontraste mit den Grenzdifferenzen $FSD_{\alpha;a}$:

Hypothese	Kontrast	$FSD_{\alpha;a}$	Test
1	0,12	0,920	nicht signifikant
2	-0,76	0,920	nicht signifikant
3	0,83	0,920	nicht signifikant
4	0,95	0,797	signifikant
5	0,88	0,564	signifikant

(1-α)-Konfidenzintervalle:

Hypothese	Kontrast	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	(1-α)-Konfidenzintervall obere Grenze	Test
1	0,12	-0,800	1,040	nicht signifikant
2	-0,76	-1,680	0,160	nicht signifikant
3	0,83	-0,090	1,750	nicht signifikant
4	0,95	0,183	1,717	signifikant
5	0,88	0,316	1,444	signifikant

SAS

Analog zur Realisierung der bisher behandelten Prozeduren zum Vergleich von Mittelwerten wird die SAS-Datei `bsp84` mit dem Prüffaktor (Klassifikationsvariable) `mutante` und dem Prüfmerkmal `hof` herangezogen:

```
proc glm data=bsp84;
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
  means mutante/ scheffe cldiff nosort;
  means mutante/ scheffe lines;
run;
```

Output ohne die Varianztabelle und die doppelten Mittelwertvergleiche:

```
General Linear Models Procedure
Scheffe's test for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate but
      generally has a higher type II error rate than Tukey's for
      all pairwise comparisons.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of F= 2.43769
Minimum Significant Difference= 0.9208

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                  Simultaneous               Simultaneous
                      Lower     Difference      Upper
   MUTANTE         Confidence     Between     Confidence
  Comparison          Limit        Means         Limit

M1    - M2          -0.8008      0.1200       1.0408                    (Hypothese 1)
M1    - M3          -1.6808     -0.7600       0.1608                    (Hypothese 2)
M1    - M4          -0.8808      0.0400       0.9608
M1    - M5          -0.0908      0.8300       1.7508                    (Hypothese 3)
M1    - M6          -0.2921      0.6288       1.5496

M2    - M3          -1.8008     -0.8800       0.0408
M2    - M4          -1.0008     -0.0800       0.8408
M2    - M5          -0.2108      0.7100       1.6308
M2    - M6          -0.4121      0.5087       1.4296

M3    - M4          -0.1208      0.8000       1.7208
M3    - M5           0.6692      1.5900       2.5108   ***
M3    - M6           0.4679      1.3888       2.3096   ***

M4    - M5          -0.1308      0.7900       1.7108
M4    - M6          -0.3321      0.5888       1.5096

M5    - M6          -1.1221     -0.2012       0.7196

General Linear Models Procedure
Scheffe's test for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate but
      generally has a higher type II error rate than REGWF for all
      pairwise comparisons
```

```
Alpha= 0.05  df= 42  MSE= 0.278274
Critical Value of F= 2.43769
Minimum Significant Difference= 0.9208

Means with the same letter are not significantly different.

 Scheffe Grouping              Mean       N  MUTANTE

                A           24.2200       8  M3
                A
         B      A           23.4600       8  M1
         B      A
         B      A           23.4200       8  M4
         B      A
         B      A           23.3400       8  M2
         B
         B                  22.8313       8  M6
         B
         B                  22.6300       8  M5
```

Es können mit SAS mit Hilfe der Standard-Optionen (leider) nur die einfachen Kontraste getestet werden. Die berechnete Grenzdifferenz ist (bei gleichem Stichprobenumfang) für alle Kontraste der einfachen Mittelwertdifferenzen gleich.

8.2.5.9 Newman-Keuls-Prozedur

Als zwei Beispiele für die Mehrschritt-Verfahren werden nachfolgend die Newman-Keuls-Prozedur und die Dunnett-Prozedur mit gestaffelten Grenzdifferenzen behandelt. Das Grundprinzip ist, schrittweise von der Globalhypothese - gewissermaßen von „oben" - zu den Einzelhypothesen, also nach „unten" vorzugehen. Dazu müssen die Stichprobenmittelwerte in einer der Größe nach geordneten Reihe vorliegen: $\bar{y}_{(1)} \leq \bar{y}_{(2)} \leq \ldots \leq \bar{y}_{(a)}$. Da diese Reihenfolge beim Abbruch des Mehrschritt-Verfahrens eine Rolle spielt, kommt ein weiterer Fehler[19] in Betracht, da die Anordnung der Stichprobenmittelwerte nicht mit der der Erwartungswerte übereinstimmen muß. Dieser Fehler III wird nicht getestet.

Bei der Newman-Keuls-Prozedur (oder auch Student-Newman-Keuls-Prozedur) ist die Globalhypothese die Tukey-Prozedur. Mit dem Prüfen der Nullhypothese, es bestehen keine Unterschiede in der Spannweite vom kleinsten zum größten Stichprobenmittelwert werden alle Mittelwerte umfaßt. Für die nächste Stufe wird die Anzahl der geordneten Mittelwerte um einen reduziert. Nun können auf dieser Stufe die entsprechenden Hypothesen formuliert und geprüft werden - usw.

Das Differenzendreieck der der Größe nach geordneten Stichprobenmittelwerte wird gebildet. Zur Veranschaulichung werden sechs Mittelwerte zu vergleichender Stichproben gewählt.

Mittelwert-differenz	$\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(5)}$
$\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(2)}-\bar{y}_{(1)}$				
$\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(3)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(3)}-\bar{y}_{(2)}$			
$\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(4)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(4)}-\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(4)}-\bar{y}_{(3)}$		
$\bar{y}_{(5)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(4)}$	
$\bar{y}_{(6)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(5)}$

Auf der Grundlage der geordneten Stichprobenmittelwerte $\bar{y}_{(1)} \leq \bar{y}_{(2)} \leq \ldots \leq \bar{y}_{(6)}$ (!) lauten die Nullhypothesen:

[19] siehe auch: HOLZER, Ch. und M. PRECHT: Welchen multiplen Mittelwertsvergleich soll man verwenden? Landwirtschaftliches Jahrbuch **69** (1992) Heft 4, S. 411-436

Nullhypothese	$\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(5)}$
$\bar{y}_{(2)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}$				
$\bar{y}_{(3)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}$			
$\bar{y}_{(4)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}$	$\mu_{(3)}=\mu_{(4)}$		
$\bar{y}_{(5)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	$\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	$\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	
$\bar{y}_{(6)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$

Die einzelnen Stufen sind mit Grautönen unterlegt, wobei die Einzelhypothesen die dunkelste Unterlegung haben.

Nullhypothese	$\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(5)}$
$\bar{y}_{(2)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}$				
$\bar{y}_{(3)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}$			
$\bar{y}_{(4)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}$	$\mu_{(3)}=\mu_{(4)}$		
$\bar{y}_{(5)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	$\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	$\mu_{(4)}=\mu_{(5)}$	
$\bar{y}_{(6)}$	$\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$	$\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$

Zur Prüfung der Nullhypothese $\mu_{(1)}=\mu_{(2)}=\mu_{(3)}=\mu_{(4)}=\mu_{(5)}=\mu_{(6)}$ wird die Differenz $\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(1)}$ mit der Grenzdifferenz der Tukey-Prozedur $HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n}$ verglichen, wobei von gleichen Stichprobenumfängen n ausgegangen werden sollte. Damit basiert die erste Stufe der Newman-Keuls-Prozedur auf dem Quantil der studentisierten Spannweiten-Verteilung $q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}}$. Für die zweite Stufe, die a - 1 Mittelwerte umfaßt, wird das Quantil $q_{1-\alpha;a-1,FG_{Rest}}$ verwendet usw. bis zur Prüfung der Einzelhypothesen unter Verwendung des Quantils $q_{1-\alpha;2,FG_{Rest}}$. Für sechs der Größe nach geordnete, zu vergleichende Stichprobenmittelwerte sind das folgende Quantile

Quantile	$\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(5)}$
$\bar{y}_{(2)}$	$q_{1-\alpha;2,FG_{Rest}}$				
$\bar{y}_{(3)}$	$q_{1-\alpha;3,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;2,FG_{Rest}}$			
$\bar{y}_{(4)}$	$q_{1-\alpha;4,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;3,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;2,FG_{Rest}}$		
$\bar{y}_{(5)}$	$q_{1-\alpha;5,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;4,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;3,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;2,FG_{Rest}}$	
$\bar{y}_{(6)}$	$q_{1-\alpha;6,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;5,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;4,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;3,FG_{Rest}}$	$q_{1-\alpha;2,FG_{Rest}}$

Jede Stufe hat also ihre eigene Grenzdifferenz.

Mittelwertdifferenz	$\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(5)}$
$\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(2)}-\bar{y}_{(1)}$				
$\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(3)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(3)}-\bar{y}_{(2)}$			
$\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(4)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(4)}-\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(4)}-\bar{y}_{(3)}$		
$\bar{y}_{(5)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(5)}-\bar{y}_{(4)}$	
$\bar{y}_{(6)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(1)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(2)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(3)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(4)}$	$\bar{y}_{(6)}-\bar{y}_{(5)}$
	$HSD_{\alpha,6}$	$HSD_{\alpha,5}$	$HSD_{\alpha,4}$	$HSD_{\alpha,3}$	$HSD_{\alpha,2}$

Papier und Bleistift

Zurückgehend auf das Beispiel 8.4 soll der Vergleich der Mittelwerte mit der Newman-Keuls-Prozedur bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ vorgenommen werden. Das Ergebnis ist mit dem der Tukey-Prozedur zu vergleichen.

Die Mittelwerte der Stichproben sind:

M1	M2	M3	M4	M5	M6
23,46	23,34	24,22	23,42	22,63	22,83

und der Größe nach geordnet:

M5	M6	M2	M4	M1	M3
22,63	22,83	23,34	23,42	23,46	24,22

Die Differenzen der Mittelwerte

Mittelwert-differenz		M5 22,63	M6 22,83	M2 23,34	M4 23,42	M1 23,46
M6	22,83	0,20				
M2	23,34	0,71	0,51			
M4	23,42	0,79	0,59	0,08		
M1	23,46	0,83	0,63	0,12	0,04	
M3	24,22	1,59	1,39	0,88	0,80	0,76

werden mit den gestaffelten Grenzdifferenzen verglichen. Die entsprechenden Quantile der studentisierten Spannweiten-Verteilung[20] und die gestaffelten Grenzdifferenzen sind für

$a = 6$
$n_i = n = 8$
$s^2_{Rest} = 0{,}278$
$FG_{Rest} = N - a = 42$
$\alpha = 0{,}05$

Quantile		$HSD_{\alpha;a} = q * s_{Rest} / \sqrt{n}$
$q_{1-\alpha;6,FG_{Rest}}$	= 4,222	0,787
$q_{1-\alpha;5,FG_{Rest}}$	= 4,030	0,751
$q_{1-\alpha;4,FG_{Rest}}$	= 3,783	0,705
$q_{1-\alpha;3,FG_{Rest}}$	= 3,436	0,641
$q_{1-\alpha;2,FG_{Rest}}$	= 2,854	0,532

Die Signifikanzentscheidung auf der Grundlage der gestaffelten Grenzdifferenzen lautet:

Signifikanz	M5	M6	M2	M4	M1
M6	-				
M2	*	-			
M4	*	-	-		
M1	*	-	-	-	
M3	*	*	*	*	*

[20] SAS-Programm:
```
proc iml;
  q = j(5,1,1);
  do i = 1 to 5;  q[i]=probmc("RANGE",.,0.95,42,7-i);  end;
  print q;
quit;
```

Genauso umsortiert lieferte im Vergleich dazu die Tukey-Prozedur:

Signifikanz	M5	M6	M2	M4	M1
M6					
M2					
M4	*				
M1	*				
M3	*	*	*	*	

Die Signifikanzaussage bezieht sich immer auf die der Größe nach geordneten Mittelwerte. Wenn ausgehend von der Grenzdifferenz $HSD_{\alpha;a}$ zur nächst niedrigeren Stufe, nach „unten", das erste Mal keine Signifikanz auftritt, bricht das Verfahren ab. Sollten dann noch Signifikanzen berechnet werden, so können sie aufgrund der Hypothesenzuordnung nicht als solche interpretiert werden!

Bei der Newman-Keuls-Prozedur wird für jeden Einzeltest die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α verwendet. Allerdings wird dieses vergleichsbezogene Risiko für a > 3 nicht eingehalten, sondern das versuchsbezogene.

Die Berechnung der Konfidenzintervalle wird für die Newman-Keuls-Prozedur nicht vorgenommen, da man sich entscheiden muß, ob die Grenzdifferenz des Einzelvergleichs, des Globaltests (= Tukey-Prozedur) oder die einer dazwischenliegenden Stufe herangezogen werden soll.

Die unterschiedlichen Grenzdifferenzen sind auch bei der Methode der Verbindungslinien zu beachten.

Methode der Verbindungslinien:

M5	M6	M2	M4	M1	M3
22,63	22,83	23,34	23,42	23,46	24,22

$HSD_{\alpha;2}$
$HSD_{\alpha;4}$

Signifikanzkennzeichnung mit gleichen Buchstaben:

M5	22,63	a		
M6	22,83	a	b	
M2	23,34		b	
M4	23,42		b	
M1	23,46		b	
M3	24,22			c

SAS

Die Betrachtung der Newman-Keuls-Prozedur baut für das bisherige Beispiel wieder auf die SAS-Datei `bsp84` mit dem Prüffaktor (Klassifikationsvariable) `mutante` und dem Prüfmerkmal `hof` auf. Die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ entspricht der Standardeinstellung.

```
proc glm data=bsp84;
  class mutante;
  model hof = mutante / ss3;
  means mutante/ snk lines;          snk: Student-Newman-Keuls-Prozedur  [cldiff : nicht möglich]
run;
```

Das um die Varianzanalyse gekürzte SAS-Output weist die bekannten Ergebnisse aus.

```
General Linear Models Procedure
Student-Newman-Keuls test for variable: HOF

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate
      under the complete null hypothesis but not under partial
      null hypotheses.

Alpha= 0.05   df= 42   MSE= 0.278274

Number of Means          2          3          4          5          6
Critical Range   0.5322929 0.6407992  0.705542 0.7516599   0.787385

Means with the same letter are not significantly different.

         SNK Grouping              Mean       N  MUTANTE

                    A           24.2200       8  M3

                    B           23.4600       8  M1
                    B
                    B           23.4200       8  M4
                    B
                    B           23.3400       8  M2
                    B
            C       B           22.8313       8  M6
            C
            C                   22.6300       8  M5
```

8.2.5.10 Dunnett-Prozedur mit gestaffelten Grenzdifferenzen

Für den Globaltest, d. h. für den Vergleich des Mittelwertes, der vom Mittelwert des Standards (Bezugsvariante) am weitesten entfernt ist, mit dem Mittelwert des Standards stimmt die Dunnett-Prozedur mit gestaffelten Grenzdifferenzen mit der Dunnett-Prozedur (Abschnitt 8.2.5.6) $DSD_{\alpha;k}$ überein. Die Grenzdifferenz berechnet sich also in Abhängigkeit von der Entfernung von Mittelwert des Standards (Bezugsvariante). Allerdings kann es bei solchen Spannweitentests nur die zweiseitige Fragestellung geben.

Die Mittelwertdifferenzen zum Mittelwert des Standards werden unabhängig vom Vorzeichen, der absoluten Größe nach geordnet. Bei a = 6 Stichproben, von denen eine ein Standard (Bezugsvariante) ist, werden den k = a - 1 Differenzen $y_i - y_0 = d_i$ (i=1, 2, ..., k=a-1) folgende Grenzdifferenzen zugeordnet:

Differenz	Grenzdifferenz
$d_{(5)}$	$DSD_{\alpha;5} = \lvert d \rvert_{1-\alpha/2;5,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}$
$d_{(4)}$	$DSD_{\alpha;4} = \lvert d \rvert_{1-\alpha/2;4,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}$
$d_{(3)}$	$DSD_{\alpha;3} = \lvert d \rvert_{1-\alpha/2;3,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}$
$d_{(2)}$	$DSD_{\alpha;2} = \lvert d \rvert_{1-\alpha/2;2,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}$
$d_{(1)}$	$DSD_{\alpha;1} = \lvert d \rvert_{1-\alpha/2;1,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}$

Papier und Bleistift

Für die Dunnett-Prozedur mit gestaffelten Grenzdifferenzen wird dasselbe Beispiel wie für die Dunnett-Prozedur gewählt. Die Mutante M3 sei ein langjähriger Standard. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α = 0,05 (zweiseitig) soll geprüft werden, welche Mutanten signifikant schlechter als der Standard $\bar{y}_{M3} = \bar{y}_0$ = 24,22 sind.

Mit $k = a - 1 = 5$
$n_i = n = 8$
$s^2_{Rest} = 0{,}278$
$FG_{Rest} = N - a = 42$
$\alpha = 0{,}05$ (zweiseitig)

sind die geordneten Differenzen zum Standard, die Quantile der Prüfgröße der zweiseitigen Dunnett-Prozedur, die Grenzdifferenzen und die Signifikanzaussagen in nachstehender Tabelle aufgelistet.

Mittelwert		Differenz	k	$\lvert d \rvert_{1-\alpha/2;k,FG_{Rest}}$ [21]	$DSD_{\alpha;k}$	Test	Nullhypothese
M5	22,63	-1,59	5	2.614	0,689	signifikant	$\mu_{M5}=\mu_{M6}=\mu_{M2}=\mu_{M4}=\mu_{M1}=\mu_0$
M6	22,83	-1,39	4	2.538	0,669	signifikant	$\mu_{M6}=\mu_{M2}=\mu_{M4}=\mu_{M1}=\mu_0$
M2	23,34	-0,88	3	2.437	0,642	signifikant	$\mu_{M2}=\mu_{M4}=\mu_{M1}=\mu_0$
M4	23,42	-0,80	2	2.289	0,603	signifikant	$\mu_{M4}=\mu_{M1}=\mu_0$
M1	23,46	-0,76	1	2.018	0,532	signifikant	$\mu_{M1}=\mu_0$

Die Dunnett-Prozedur (s. 8.2.5.6) wurde mit einseitiger Fragestellung durchgeführt. Die Grenzdifferenzen sind folglich andere.

Bei den gestaffelten Grenzdifferenzen muß aber immer die Anordnung der Größe nach - entweder die der Mittelwerte (z. B. Newman-Keuls-Test) oder die der Mittelwertdifferenzen zum Standard (Dunnett-Prozedur mit gestaffelten Grenzdifferenzen) berücksichtigt werden, was sich in den aufgeführten Nullhypothesen ausdrückt.

Die Dunnett-Prozedur mit gestaffelten Grenzdifferenzen ist in SAS standardseitig nicht implementiert.

8.2.5.11 Zur Duncan-Prozedur

Es gibt noch weitere Prozeduren zum multiplen Vergleich von Mittelwerten. Dazu gehört auch der Duncan-Test (Duncan-Prozedur). Er sollte allerdings <u>nicht</u> herangezogen werden, weil dieser Test weder die multiple (vergleichsbezogene) noch die globale (versuchsbezogene) Irrtumswahrscheinlichkeit einhält.[22] Auch wenn dieser Test noch genutzt wird, in Richtlinien aufgeführt und sogar in SAS implementiert ist, kann er dennoch nicht empfohlen werden!

[21] SAS: `d=probmc("DUNNETT2",.,1-0.05,42,k);` für k = 5, 4, 3, 2, 1

[22] die Anzahl gleichlautender Literaturstellen ist groß; zwei sollen genannt werden:
RASCH, D., G. ENDERLEIN und G. HERRENDÖRFER: Biometrie . Verfahren, Tabellen, angewandte Statistik VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1973, S. 88
HORN, M. und R. VOLLANDT: Multiple Tests und Auswahlverfahren Gustav Fisher Verlag, Stuttgart Jena, 1995, S. 106

8.2.5.12 Bemerkung zur SAS-Auswertung bei ungleicher Stichprobengröße

Bei ungleicher Stichprobengröße werden die Konfidenzintervalle (Option `cldiff`) richtig berechnet.
Bei Verwendung der Option `lines`, dem der Methode der Verbindungslinien entsprechenden Verfahren, wird die Signifikanz auf der Grundlage des harmonischen Mittels $\sqrt{2/\bar{y}_a} = \sqrt{2/a(1/n_1+...+1/n_a)}$ (a Behandlungen) festgelegt und nicht die Approximation für ungleiche Wiederholungszahlen verwendet. SAS warnt mit einem entsprechenden Hinweis. Es können also zwischen beiden Ergebnisdarstellungen der multiplen Prozeduren (Option `cldiff` und `lines`) Unterschiede bestehen!

Aufgabe 8.7: Aufbauend auf die Aufgabe 8.6 (sechs verschiedene Behandlungen gegen Endfäule an Gurken ... , $\alpha = 0.05$) sollen als Rechenbeispiele für die Anwendung multipler Mittelwertvergleiche folgende Fragestellungen, die unabhängig voneinander sind, untersucht werden.

a) Unterscheiden sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ in ihrer mittleren Wirkung voneinander die Behandlungen
Beh1 und Beh5 , Beh5 und Beh6 , Beh3 und Beh4 ?

b) Welche Behandlungen unterscheiden sich in ihrer mittleren Wirkung paarweise von den anderen (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$) ?

c) Gibt es Behandlungen, die sich in ihrer mittleren Wirkung von Standard Beh2 signifikant unterscheiden (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$) ?

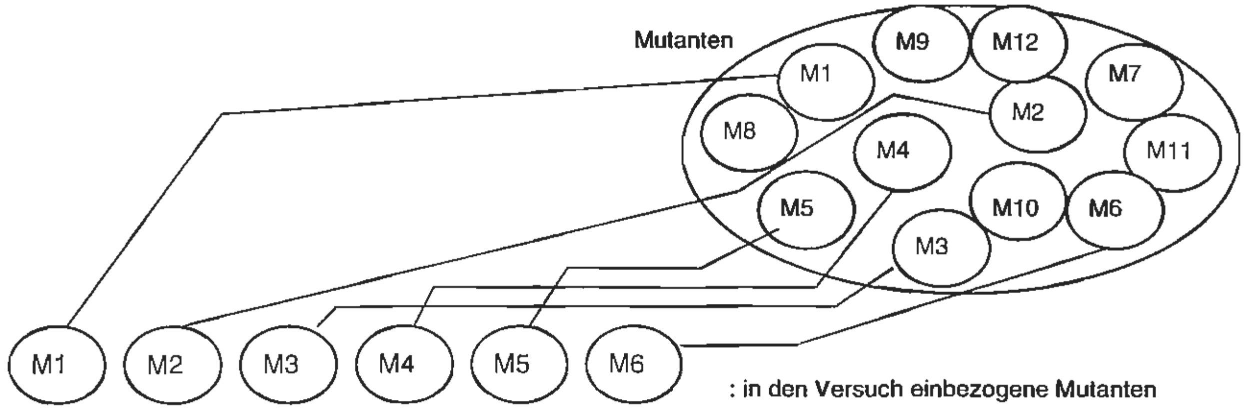
9 Einfaktorielles Varianzanalysemodell mit zufälligen Effekten (Modell II)

9.1 Schätzen der Varianzkomponenten und Test

Die Unterschiede zwischen dem Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) und dem mit zufälligen Effekten (Modell II) sollen anhand des Beispiels 8.4 verdeutlicht werden.

Aus einer Vielzahl von Mutanten sind ganz bewußt die Mutanten M1, M2, M3, M4, M5 und M6 ausgewählt worden. Sie sollen hinsichtlich ihrer mittleren Wirkung in der Ausprägung der Hemmhöfe verglichen werden. Bei einer solchen Zielstellung handelt es sich um das Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I).

Werden nun aus einer Vielzahl von Mutanten zufällig die Mutanten M1, M2, M3, M4, M5 und M6 ausgewählt:



kann doch die mittlere Wirkung eines (bestimmten) Mutanten in Vergleich zu einem anderen nicht interessieren. Das Ziel ist dann, eine Aussage über die Gesamtheit aller Mutanten zu machen. Die zufällig ausgewählten Mutanten repräsentieren diese Gesamtheit. Mit dem Varianzanalysemodell II, dem Modell mit zufälligen Effekten, werden die Varianzen der zufälligen Faktoren (Faktoren mit zufällig ausgewählten Stufen) geschätzt. Diese Varianzen werden Varianzkomponenten genannt. Getestet wird, ob sie signifikant von Null verschieden sind.

In der Varianztabelle für einen einfaktoriellen Versuch ändern sich beim Modell II die Erwartungswerte:

Varianzursache	Freiheitsgrade FG	Summe der Abweichungsquadrate SQ	mittlere quadratische Abweichung MQ	erwartete mittlere quadratische Abweichung **E(MQ)**
gesamt	N - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2$		
Faktor A	a - 1	$\sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\sigma^2_{Rest}+\frac{1}{a-1}\left(N-\frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{N}\right)\sigma^2_A$
Rest	N - a	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$	σ^2_{Rest}

$$N=\sum_i n_i$$

Durch das Unterstreichen der Effekte des Faktors A wird auch im Modell $\underline{y}_{ij} = \mu + \underline{a}_i + \underline{\varepsilon}_{ij}$ sichtbar gemacht, daß es sich um zufällige Effekte handelt.

Wenn der Varianzanteil eines Zuchtmerkmals oder die Variabilität genetisch bedingter Eigenschaften eingeschätzt werden soll, wird das Modell II genutzt. Im Feldversuchswesen ist der Prüffaktor Orte zufällig, wenn über ein Gebiet und nicht speziell für die ausgewählten Versuchsstandorte Schlußfolgerungen gezogen werden sollen.

Beispiel 9.1:

Zu den Daten des Beispiels 8.4 wird eine neue Aufgabenstellung formuliert:
Die Hemmhöfe von sechs zufällig ausgewählten Mutanten M1 bis M6 eines Penicillin produzierenden Mikroorganismusstammes werden in Millimetern gemessen. Je größer die Hemmhöfe sind, um so mehr Penicillin wird produziert.

M1	M2	M3	M4	M5	M6
23.92	23.25	24.81	23.92	22.93	21.91
23.06	23.18	24.03	23.82	22.40	23.07
23.04	23.70	23.95	22.71	22.64	22.98
24.15	22.78	24.31	22.92	21.81	23.77
23.01	24.38	23.45	23.67	23.02	22.55
22.89	22.43	23.92	23.29	23.10	23.32
24.03	23.51	24.07	23.89	22.52	22.27
23.58	23.49	25.22	23.14	22.62	22.78

Der Varianzanteil, der durch die Mutanten hervorgerufen wird, soll geschätzt werden. Es ist zu prüfen, ob sich diese Varianzkomponente bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ signifikant von Null unterscheidet. Die Hypothese

H_0: $\sigma^2_{\text{Mutante}} = 0$

ist gegen die Alternativhypothese

H_A: $\sigma^2_{\text{Mutante}} > 0$

zu testen.

Papier und Bleistift

Aus der für das Varianzanalysemodell I aufgestellten Varianztabelle

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;5,42}$	Test
Gesamt	47	24,1268				
zwischen den Mutanten (Faktor A)	5	12,4393	2,488	8,64	2,438	signifikant
innerhalb der Mutanten (Rest)	42	11,6875	0,278			

werden entnommen:

$MQ_A = 2{,}488$

$MQ_{Rest} = 0{,}278 \quad = s^2_{Rest} = \hat{\sigma}^2_{Rest}$

Der Erwartungswert E(MQ) für den Faktor A (Mutanten) ist definiert mit

$$\sigma^2_{Rest} + \frac{1}{a-1}\left(N - \frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{N} \right)\sigma^2_A \quad .$$

Der Koeffizient kann berechnet werden: $\frac{1}{a-1}\left(N-\frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{N}\right)=\frac{1}{6-1}\left(48-\frac{8^2+8^2+8^2+8^2+8^2+8^2}{48}\right)=8$

und es gilt $\hat{\sigma}^2_{Rest}+8\,\hat{\sigma}^2_{Mutante}$ = 2,488. Folglich ist $\hat{\sigma}^2_{Mutante}$= $s^2_{Mutante}$ = (2,488-0,278)/8 = 0,276. Ausgehend von den Schätzwerte ist das Verhältnis der Varianzkomponenten $\sigma^2_{Rest}:\sigma^2_{Mutante}$ = 1 : 1.

Die Antwort auf die Frage, ob die Nullhypothese H_0: $\sigma^2_{Mutante} = 0$ zu verwerfen ist oder nicht, liefert derselbe F-Test wie beim Varianzanalysemodell I. Mit dem Blick auf den Erwartungswert $E(MQ_A)$ [für das Beispiel $E(MQ_{Mutante})$] wird erkennbar, daß der F-Wert 1 ist, wenn gilt $\sigma^2_{Mutante} = 0$. Da der F-Test bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ Signifikanz anzeigt, ist die Nullhypothese zu verwerfen. Die Varianzkomponente $\sigma^2_{Mutante}$ ist also größer Null und hat einen bedeutsamen Beitrag an der Gesamtvarianz des Versuches.

In *EXCEL* kann aus der Varianztabelle die Varianzkomponente für den Prüffaktor geschätzt werden.

SAS

Die Prozedur VARKOMP ist vor allem für die Varianzanalyse nach dem Modell II gedacht.

```
proc varcomp data=bsp84
           method=type1;            method=type1 gestattet den Vergleich mit der Handrechnung
  class mutante;
  model hof = mutante;              Model: Prüfmerkmal = Prüffaktor(en)
run;
```

Das SAS-Output:

```
Variance Components Estimation Procedure
Class Level Information

Class      Levels     Values

MUTANTE        6      M1 M2 M3 M4 M5 M6

Number of observations in data set = 48

Variance Components Estimation Procedure

Dependent Variable: HOF

Source             DF      Type I SS      Type I MS     Expected Mean Square
MUTANTE             5    12.43934375    2.48786875     Var(Error) + 8 Var(MUTANTE)
Error              42    11.68748750    0.27827351     Var (Error )
Corrected Total    47    24.12683125

Variance Component                         Estimate
Var(MUTANTE)                             0.27619940
Var(Error)                               0.27827351
```

bestätigt das Verhältnis der Varianzkomponenten von 1 : 1 . Allerdings wird kein F-Test durchgeführt und folglich auch keine Überschreitungswahrscheinlichkeit ausgegeben.

Die Prozedur VARKOMP beinhaltet verschiedene Methoden zur Schätzung der Varianzkomponenten: `method = type1` oder `mivque0` (Standardeinstellung) oder `ml` oder `reml` .

9.2 Der Intraklasskorrelationskoeffizient

Der Intraklasskorrelationskoeffizient ist ein Maß für die Größe des Zusammenhanges zweier zufällig ausgewählter Elemente derselben Klasse. Er ist eine Statistik für die Innerklassenkorrelation. Er ist für das einfaktorielle Varianzanalysemodell mit zufälligen Effekten definiert als

$$\rho = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_{Rest}^2} \quad .$$

Mit den Schätzwerten für die Varianzkoeffizienten aus dem Beispiel 9.1 kann der Intraklasskorrelationskoeffizient geschätzt werden mit

$$\hat{\rho} = \frac{0{,}276}{0{,}276 + 0{,}278} = 0{,}498 \quad .$$

Da die Varianzkomponente des Prüffaktors Mutante signifikant von Null verschieden ist, ist auch der Intraklasskorrelationskoeffizient signifikant. Zwischen den Wiederholungen besteht bezüglich der Hemmdurchmesser ein Zusammenhang.

Aufgabe 9.1: Fünf Bullen B1 bis B5 werden aus einer größeren Menge zufällig ausgewählt. Die Milchfettleistungen der weiblichen Nachkommen in der ersten Laktation werden untersucht. Die Varianzkomponente, die durch die verschiedenen Väter bei den Milchfettleistungen ihrer Nachkommen verursacht wird, soll geschätzt und mit Null verglichen werden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist $\alpha = 0{,}05$.[23]

B1	B2	B3	B4	B5
155	135	108	124	142
147	143	140	163	110
150	128	122	145	121
106	140	107	113	119
134	143	152	143	131
105	157	133	159	142
105	164	116	161	130
153	133	114	150	127
162	142	148	155	101
135	149	156	129	138
105	159	136	105	104
163		113		150

[23] Beispiel 7.2 , gekürzt von 10 auf 5 Bullen aus:
RASCH, D.; ENDERLEIN, G. und G. HERRENDÖRFER: Biometrie. Verfahren, Tabellen, Angewandte Statistik, VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1973, S. 137f

10 Die zweifaktorielle Varianzanalyse

10.1 Varianzanalysemodell mit festen Effekten

10.1.1 Vollständige Kreuzklassifikation mit einfacher Besetzung

Bei der einfaktoriellen (oder einfachen) Varianzanalyse werden mehrere Stichproben betrachtet, die als Stufen *eines* Prüffaktors aufgefaßt werden können. Zwei Prüffaktoren liegen dann vor, wenn jeder der Faktoren mindestens zwei Stufen hat. Allgemein werden die Faktoren mit den Buchstaben A und B bezeichnet. Die Anzahl ihrer Stufen ist für den Prüffaktor A a (i = 1, 2, ..., a) und b (j = 1, 2, ..., b) für den Prüffaktor B.
Die vollständige Kreuzklassifikation mit einfacher Besetzung (einer Wiederholung) ist dann gegeben, wenn für jede *ab* - Stufenkombination genau ein Wert vorliegt. Das allgemeine Schema hat folgende Form:

		Stufen des Faktors B					
		1	2	...	j	...	b
	1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1b}
Stufen	2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2b}
des	...	...	...	...	...	...	...
Faktors A	i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{ib}
	...	...	...	...	...	...	...
	a	y_{a1}	y_{a2}	...	y_{aj}	...	y_{ab}

Die Bezeichnung für die Prüffaktoren A und B ist vertauschbar.

Für das Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit einfacher Besetzung gelten

- das lineare, additive Modell $\boxed{\underline{y}_{ij} = \mu + a_i + b_j + \underline{\varepsilon}_{ij}}$ mit
  μ: Erwartungswert der Grundgesamtheit des Versuches,
  a_i: Effekt der i-ten Stufe des Prüffaktors A
  b_j: Effekt der j-ten Stufe des Prüffaktors B
- der Fehlerterm $\underline{\varepsilon}_{ij}$ ist eine unabhängige Zufallsvariable
- der Erwartungswert der Fehlerkomponente ist Null: $E(\underline{\varepsilon}_{ij}) = 0$
- die Varianzen der $\underline{\varepsilon}_{ij}$ sind für alle i und j gleich: $VAR(\underline{\varepsilon}_{ij}) = \sigma^2$
- die Zufallsvariable $\underline{\varepsilon}_{ij}$ ist normalverteilt
- und die Reparametrisierungsbedingungen $\sum_{i=1}^{a} a_i = 0$ und $\sum_{j=1}^{b} b_j = 0$.

10.1.1.1 Varianztabelle

Bei zwei Prüffaktoren sind auch Hypothesen über die beiden Faktoren zu testen:

über den Faktor A: $H_0 : a_i = 0$, $i = 1, 2, ..., a$ gegen die Alternativhypothese $H_A : a_i \neq 0$ für mindestens ein i (i = 1, 2, ..., a)

über den Faktor B: $H_0 : b_j = 0$, $j = 1, 2, ..., b$ gegen die Alternativhypothese $H_A : b_j \neq 0$ für mindestens ein j (j = 1, 2, ..., b)

Die Prüfgrößen folgen der F-Verteilung, so daß der F-Test herangezogen wird. Die diesen Test beinhaltende Varianztabelle für das Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit einfacher Besetzung hat allgemein folgendes Aussehen:

Varianzursache	Freiheits-grade FG	Summe der Abweichungsquadrate SQ	mittlere quadratische Abweichung MQ	Test-größe F	erwartete mittlere quadratische Abweichung E(MQ)
gesamt	N - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$			
zwischen den Stufen des Faktors A	a - 1	$b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\frac{MQ_A}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2+\frac{b}{a-1}\sum_{i=1}^{a}(\mu_i-\mu)^2$
zwischen den Stufen des Faktors B	b - 1	$a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet j}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_B}{FG_B}$	$\frac{MQ_B}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2+\frac{a}{b-1}\sum_{j=1}^{b}(\mu_j-\mu)^2$
Rest	(a-1)(b-1)	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet j}+\bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$		σ^2

$N = a * b$

Beispiel 10.1

Drei Kartoffelsorten wurden im Lager mit sechs verschiedenen Fungizidpräparaten behandelt. Zum Vergleich wurde zusätzlich eine unbehandelte Variante gewählt. Die randomisierte Anordnung der Fungizidbehandlungen und Sorten war gegeben. Prüfmerkmal war der Ertrag in kg. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ soll geprüft werden, ob im Vergleich zur unbehandelten Kontrolle (UK) eine fäulnismindernde Wirkung (Ertragserhöhung) durch die Fungizidbehandlungen besteht. Desweiteren interessiert, ob und welche Sortenunterschiede sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ nachweisen lassen.

	F1	F2 = UK	F3	F4	F5	F6	F7
Sorte1	24,02	23,42	23,60	24,40	20,62	22,88	22,14
Sorte2	22,22	21,18	22,70	21,74	20,82	23,32	22,38
Sorte3	19,08	16,68	18,14	18,88	16,62	18,94	17,04

Papier und Bleistift

Um die Varianztabelle aufstellen zu können, werden die Summen der Einzelwerte und die Quadrate der Summen gebildet:

	Stufen des Faktors B (Fungizidbehandlungen)								
Sorte	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	$\sum$	$(\sum)^2$
1	24,02	23,42	23,60	24,40	20,62	22,88	22,14	161,08	25946,77
2	22,22	21,18	22,70	21,74	20,82	23,32	22,38	154,36	23827,01
3	19,08	16,68	18,14	18,88	16,62	18,94	17,04	125,38	15720,14
$\sum$	65,32	61,28	64,44	65,02	58,06	65,14	61,56	440,82	65493,92
$(\sum)^2$	4266,70	3755,24	4152,51	4227,60	3370,96	4243,22	3789,63	27805,87	

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij} = 440{,}82 \qquad \left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij}\right)^2 = 194322{,}27$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij}^2 = 9378{,}13$$

Als Hilfsgröße wird das Subtraktionsglied *Sgl* gebildet:

$$Sgl = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}\right)^2 \quad = 194322{,}27 / 21 \quad = 9253{,}44$$

$$SQ_{gesamt} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - Sgl \quad = 9378{,}13 - 9253{,}44 \quad = 124{,}69$$

$$SQ_A = b\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b} y_{ij}\right)^2 - Sgl \quad = 65493{,}92 / 7 - 9253{,}44 \quad = 102{,}83$$

$$SQ_B = a\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{\bullet j} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{a} y_{ij}\right)^2 - Sgl \quad = 27805{,}87 / 3 - 9253{,}44 \quad = 15{,}18$$

$$SQ_{Rest} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet j} + \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2 = SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B \quad = 124{,}69 - 102{,}83 - 15{,}18 \quad = \mathbf{6{,}68}$$

$FG_{gesamt} = N - 1 \quad = 21 - 1 = 20$

$FG_A = a - 1 \quad = 3 - 1 = 2$

$FG_B = b - 1 \quad = 7 - 1 = 6$

$FG_{Rest} = (a - 1)(b - 1) \quad = 2 * 6 = 12$

$$MQ_{gesamt} = s^2 = \frac{SQ_{gesamt}}{FG_{gesamt}} \quad = 124{,}69 / 20 \quad = 6{,}23$$

$$MQ_A = s_A^2 = \frac{SQ_A}{FG_A} \quad = 102{,}83 / 2 \quad = 51{,}42$$

$$MQ_B = s_B^2 = \frac{SQ_B}{FG_B} \quad = 15{,}18 / 6 \quad = 2{,}53$$

$$MQ_{Rest} = s_{Rest}^2 = \frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}} \quad = 6{,}68 / 12 \quad = 0{,}56$$

$$F_A = \frac{MQ_A}{MQ_{Rest}} \quad = 51{,}42 / 0{,}56 \quad = 91{,}82$$

$$F_B = \frac{MQ_B}{MQ_{Rest}} \quad = 2{,}53 / \mathbf{0{,}56} \quad = 4{,}52$$

Damit stehen die Werte der Varianztabelle fest, die nun folgende Form annimmt:

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;FG_1,FG_{Rest}}$	Test
Gesamt	20	124,69				
Faktor A (Sorten)	2	102,83	51,42	91,82	3,885	signifikant
Faktor B (Behandlungen)	6	15,18	2,53	4,52	2,996	signifikant
Rest	12	6,68	0,56			

Die F-Quantile sind: $F_{1-\alpha;2,12} = 3{,}885$ und $F_{1-\alpha;6,12} = 2{,}996$ (Tab. 8.4 b).

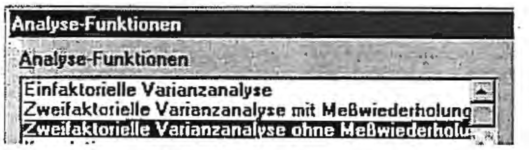
Das bedeutet, daß sich hinsichtlich des Ertrages

- unabhängig von den Fungizidbehandlungen eine Sorte von den beiden anderen
- und sich unabhängig von den Sorten (mindestens) eine Behandlung von den anderen

unterscheiden. Welche das sind, kann der F-Test nicht beantworten.

EXCEL

Pull-Down-Menü:
Extras
Analyse-Funktionen...
Zweifaktorielle Varianzanalyse ohne Meßwertwiederholung



(Sollten die Analyse-Funktionen nicht bereitstehen, dann muß im Pull-Down-Menü Extras der Add-In-Manager aufgerufen und die Analyse-Funktionen ausgewählt werden.)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		F1 = UK	F2	F3	F4	F5	F6	F7
2	Sorte1	24,02	23,42	23,6	24,4	20,62	22,88	22,14
3	Sorte2	22,22	21,18	22,7	21,74	20,82	23,32	22,38
4	Sorte3	19,08	16,68	18,14	18,88	16,62	18,94	17,04
5								
6	Anova: Zweifaktorielle Varianzanalyse ohne Meßwiederholung							
7								
8	AMMENFASS	Anzahl	Summe	Mittelwert	Varianz			
9	Sorte1	7	161,08	23,01143	1,65905			
10	Sorte2	7	154,36	22,05143	0,75651			
11	Sorte3	7	125,38	17,91143	1,22625			
12								
13	F1 = UK	3	65,32	21,77333	6,25053			
14	F2	3	61,28	20,42667	11,78253			
15	F3	3	64,44	21,48000	8,56920			
16	F4	3	65,02	21,67333	7,62093			
17	F5	3	58,06	19,35333	5,61333			
18	F6	3	65,14	21,71333	5,81693			
19	F7	3	61,56	20,52000	9,09720			
20								
21								
22	ANOVA							
23	Streuungs-	Quadrat-	Freiheits-	Mittl. Quadrat-	Prüfgröße (F)	P-Wert	kritischer	
24	ursache	summen (SS)	grade (df)	summe (MS)			F-Wert	
25	Zeilen	102,833	2	51,416	92,524	5,1011E-08	3,885	
26	Spalten	15,182	6	2,530	4,553	0,01236695	2,996	
27	Zufallsfehler	6,669	12	0,556				
28								
29	Gesamt	124,684	20					

Das Ergebnis ist dasselbe, nur mit größerer Rechengenauigkeit.

SAS

```
data bsp101;
  input sorte $ f1-f7;
  behandlg='F1'; Ertrag=f1; output;
  behandlg='F2'; Ertrag=f2; output;
  behandlg='F3'; Ertrag=f3; output;
  behandlg='F4'; Ertrag=f4; output;
  behandlg='F5'; Ertrag=f5; output;
  behandlg='F6'; Ertrag=f6; output;
  behandlg='F7'; Ertrag=f7; output;
cards;
Sorte1   24.02   23.42   23.60   24.40   20.62   22.88   22.14
Sorte2   22.22   21.18   22.70   21.74   20.82   23.32   22.38
Sorte3   19.08   16.68   18.14   18.88   16.62   18.94   17.04
;
proc glm data=bsp101;
  class sorte behandlg;                          class Faktor A  Faktor B
  model ertrag = sorte behandlg / ss3;           model Prüfmerkmal = Faktor A  Faktor B
  means sorte;                                   means Faktor A
  means behandlg;                                means Faktor B
run; quit;
```

Auch das nachfolgende SAS-Output liefert obige Ergebnisse: es gibt signifikante Unterschiede sowohl zwischen den Sorten als auch zwischen den mittleren Wirkungen der Behandlungen. Wo diese Unterschiede liegen, können die F-Tests nicht beantworten.
Die mit `means sorte;` und `means behandlg;` geforderten Standardabweichungen (SD) lassen Homogenität der Varianzen vermuten.

```
General Linear Models Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
SORTE          3    Sorte1 Sorte2 Sorte3
BEHANDLG       7    F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Number of observations in data set = 21

General Linear Models Procedure
Dependent Variable: ERTRAG

Source                  DF    Sum of Squares   F Value     Pr > F
Model                    8      118.01512381     26.55     0.0001
Error                   12        6.66853333
Corrected Total         20      124.68365714

                  R-Square              C.V.          ERTRAG Mean
                  0.946516          3.551261           20.9914286

Source                  DF       Type III SS   F Value     Pr > F
SORTE                    2      102.83280000     92.52     0.0001
BEHANDLG                 6       15.18232381      4.55     0.0124

General Linear Models Procedure

Level of          ------------ERTRAG-----------
SORTE       N        Mean              SD
Sorte1      7     23.0114286        1.28804022
Sorte2      7     22.0514286        0.86977830
Sorte3      7     17.9114286        1.10736065

General Linear Models Procedure

Level of          ------------ERTRAG-----------
BEHANDLG    N        Mean              SD
F1          3     21.7733333        2.50010666
F2          3     20.4266667        3.43256949
F3          3     21.4800000        2.92731959
F4          3     21.6733333        2.76060380
F5          3     19.3533333        2.36924742
F6          3     21.7133333        2.41183195
F7          3     20.5200000        3.01615649
```

10.1.1.2 Varianzhomogenität und Normalverteiltheit der Residuen

Erstmals ist mit SAS 6.12 in der SAS-Prozedur `glm` die Möglichkeit von Tests zur Varianzhomogenität vorgesehen. Die gilt nur für einfaktorielle Modelle. Sollte man doch eine formale Umsetzung probieren, so wird sie ignoriert und im log-Fenster die Mitteilung geliefert:

```
WARNING: Homogeneity of variance testing and Welch's ANOVA are
         only available for unweighted one-way models.
```

Einen Blick auf die mit Hilfe der beiden Programmzeilen

```
means sorte;
means behandlg;
```

ausgegebenen Standardabweichungen sollten man auf jeden Fall vornehmen. „Auffälligkeiten" sind für das Beispiel 10.1 nicht erkennbar.

Für den Test der Residuen auf Normalverteiltheit, werden erst (modellgerecht) die Residuen berechnet, deren Verteilung dann mit `proc univariate` getestet wird (vgl. 8.2.2.2).

```
proc glm data=bsp101;
  class sorte behandlg;
  model ertrag = sorte behandlg / ss3;
  output out=resi
         residual=res ;
proc univariate data=resi normal;
  var res;
run;  quit;
```

```
Variable=RES
Moments

 N                21 Sum Wgts          21                Quantiles(Def=5)
 Mean              0 Sum                0
 Std Dev    0.577431 Variance    0.333427     100% Max  0.973333       99%  0.973333
 Skewness   -0.15621 Kurtosis    -1.10376      75% Q3   0.386667       95%       0.8
 USS        6.668533 CSS         6.668533      50% Med      0.16       90%  0.706667
 CV                . Std Mean    0.126006      25% Q1       -0.4       10%  -0.75333
 T:Mean=0          0 Pr>|T|        1.0000       0% Min  -0.99333        5%  -0.85333
 Num ^= 0         21 Num > 0           12                                1%  -0.99333
 M(Sign)         1.5 Pr>=|M|       0.6636     Range     1.966667
 Sgn Rank         -2 Pr>=|S|       0.9466     Q3-Q1     0.786667
 W:Normal   0.954936 Pr<W          0.4132     Mode      -0.99333

                     Extremes

    Lowest     Obs      Highest     Obs
  -0.99333(      11)  0.406667(       12)
  -0.85333(       6)  0.546667(       13)
  -0.75333(       5)  0.706667(        4)
  -0.66667(      16)       0.8(       14)
  -0.61333(       8)  0.973333(        2)
```

Die Zeile mit dem Testergebnis

```
W:Normal   0.954936 Pr<W          0.4132
```

zeigt, daß die Nullhypothese 'die Verteilung der Residuen unterscheidet sich nicht von der Normalverteilung' nicht verworfen werden muß.

10.1.1.3 Konfidenzintervalle der Mittelwerte

Bei einer zweifaktoriellen Versuchsanlage ohne Wiederholung mit den Prüffaktoren A und B (Modell I) sind die Mittelwerte der Stufen des Prüffaktors A und die des Faktors B zu betrachten. Mittelwerte aus den Stufenkombinationen beider Faktoren haben keinen Sinn, da nur eine einfache Besetzung vorliegt. Das zeigt aber auch die Eingeschränktheit einer solchen Versuchsanlage, die eine Bewertung der Mittelwerte der Stufenkombinationen beider Faktoren oder sogar der *Wechselwirkung beider Faktoren* nicht zuläßt.

Die (1-α)-Konfidenzintervalle werden geschätzt

für die Mittelwerte des Faktors A:

$$\left\langle \bar{y}_{i\bullet} - t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{b}}\,;\, \bar{y}_{i\bullet} + t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{b}} \right\rangle \quad (i = 1, 2, ..., a)$$

für die Mittelwerte des Faktors B:

$$\left\langle \bar{y}_{\bullet j} - t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{a}}\,;\, \bar{y}_{\bullet j} + t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{a}} \right\rangle \quad (j = 1, 2, ..., b) \quad .$$

Für die Daten des Beispiels 10.1 sind die zweiseitigen (1-α)-Konfidenzintervalle:

Sorten-Mittelwerte		Konfidenzintervall untere Grenze	Konfidenzintervall obere Grenze
Sorte1	23,01	22,14	23,88
Sorte2	22,05	21,18	22,92
Sorte3	17,91	17,04	18,78

Behandlungs-Mittelwerte		Konfidenzintervall untere Grenze	Konfidenzintervall obere Grenze
F1	21,77	20,45	23,10
F2	20,43	19,10	21,75
F3	21,48	20,15	22,81
F4	21,67	20,35	23,00
F5	19,35	18,03	20,68
F6	21,71	20,39	23,04
F7	20,52	19,20	21,85

Ihre Lage veranschaulicht die Abb. 10.1.

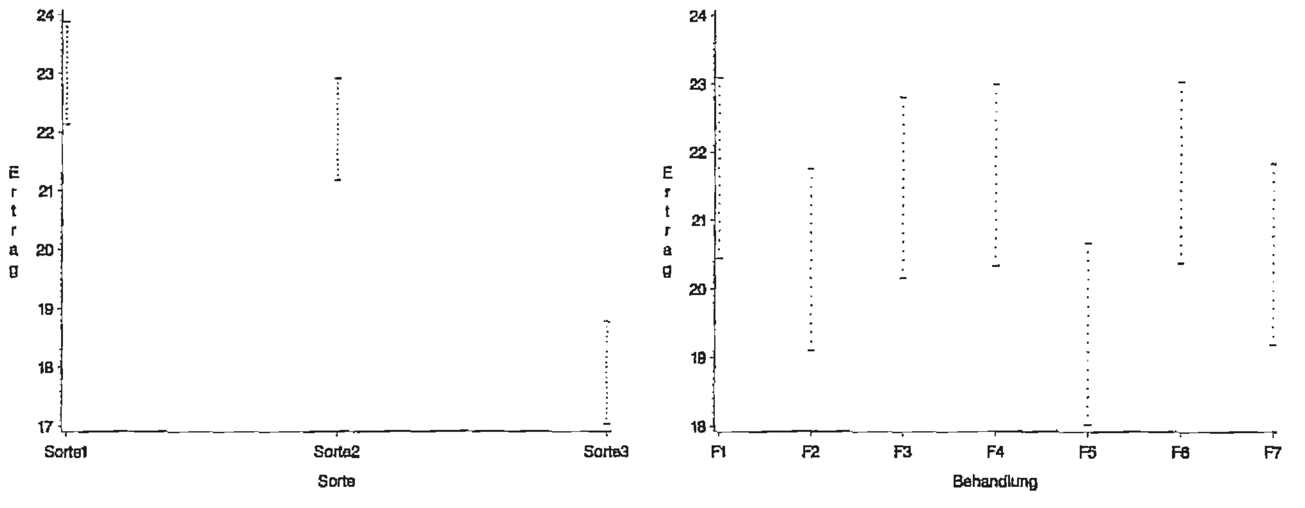


Abb. 10.1: Konfidenzintervalle der mittleren Erträge der Sorten und Behandlungen

Ein Unterschied der Sorte3 zu den beiden anderen ist deutlich erkennbar.

10.1.1.4 Multiple Mittelwertvergleiche

Für den multiplen Vergleich der Mittelwerte der Stufen des Faktors A und der des Faktors B des Varianzanalysemodells mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit einfacher Besetzung sind zwei Hypothesen zu betrachten. Einmal, daß die Stufen des Faktors A und zum anderen, daß die des Faktors B in ihrer mittleren Wirkung auf das Prüfmerkmal keinen Einfluß haben:

$H_0^A : a_i = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots a$
$H_0^B : b_j = 0$ für alle $j = 1, 2, \ldots b$.

Diese Nullhypothesen werden gegen die Alternativhypothesen

$H_A^A : a_i \neq 0$ für mindestens ein i: $i = 1, 2, \ldots a$
$H_A^B : b_j \neq 0$ für mindestens ein j: $j = 1, 2, \ldots b$

getestet.

Dementsprechend verändert sich auch die Berechnung der Grenzdifferenzen der einzelnen multiplen Mittelwertvergleiche. Die Tabelle 10.1 gibt einen Überblick.

Tabelle 10.1: Übersicht über die Berechnung der Grenzdifferenzen für das zweifaktorielle Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit einfacher Besetzung

multiple Vergleichsprozedur	Vergleich der Mittelwerte der Stufen des Faktors A	des Faktors B
multipler t-Test	$LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{b}}$	$LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{a}}$
Bonferroni-Fisher-Prozedur	$FSD_{\alpha;m} = t_{1-\alpha/(2*m);FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{b}}$ mit $m = a(a-1)/2$	$FSD_{\alpha;m} = t_{1-\alpha/(2*m);FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{a}}$ mit $m = b(b-1)/2$
Tukey-Prozedur	$HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{b}$	$HSD_{\alpha;b} = q_{1-\alpha;b,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{a}$
Dunnett-Prozedur, zweiseitig	$DSD_{\alpha;a-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha/2;a-1,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{b}}$	$DSD_{\alpha;b-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha/2;b-1,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{a}}$
Dunnett-Prozedur, einseitig	$DSD_{\alpha;a-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha;a-1,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{b}}$	$DSD_{\alpha;b-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha;b-1,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{a}}$

Für die Spannweitenprozeduren werden die entsprechenden gestaffelten Grenzdifferenzen herangezogen.

Im *Beispiel 10.1* sind ganz konkrete Mittelwertvergleiche angesprochen worden:
„Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α = 0,05 soll geprüft werden, ob im Vergleich zur unbehandelten Kontrolle (UK) eine fäulnismindernde Wirkung (Ertragserhöhung) durch die Fungizidbehandlungen besteht. Desweiteren interessiert, ob und welche Sortenunterschiede sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α = 0,05 nachweisen lassen."

Das bedeutet, daß die mittleren Erträge der Stufen des Faktors Fungizidbehandlungen mit dem mittleren Ertrag der unbehandelten Kontrolle (F2) zu vergleichen sind - und das einseitig hinsichtlich einer Ertragserhöhung. Diese Zielstellung erfüllt die Dunnett-Prozedur. Bei den Sortenunterschieden ist die Frage, ob welche nachgewiesen werden können. Die Tukey-Prozedur ist hierfür geeignet. In der Abb. 10.2[24] sind für die beiden Faktoren die mittleren Ertragsdaten dargestellt. Zu vermuten ist, daß sich die Sorte3 von den anderen beiden Sorten signifikant unterscheidet (vgl. auch Abb. 10.1). Einen signifikanten Mehrertrag im Vergleich zur unbehandelten Kontrolle (F2) könnten die Behandlungen F1, F3, F4 und F6 bringen.

[24] SAS-Programm:
```
proc means data=bsp101;
  var ertrag;
  by sorte;
  output out=smean mean=sm;
symbol1 c=black h=2.2 v=dot  i=none;
proc gplot data =smean;
  label sm  ="Ertrag"   sorte   ="Sorte";
  plot sm*sorte ;
run;
proc sort data=bsp101;
  by behandlg;
proc means data=bsp101;
  var ertrag;
  by behandlg;
  output out=bmean mean=bm;
proc gplot data =bmean;
  label bm  ="Ertrag"   behandlg="Fungizidbehandlung";
  plot bm*behandlg ;
run; quit;
```

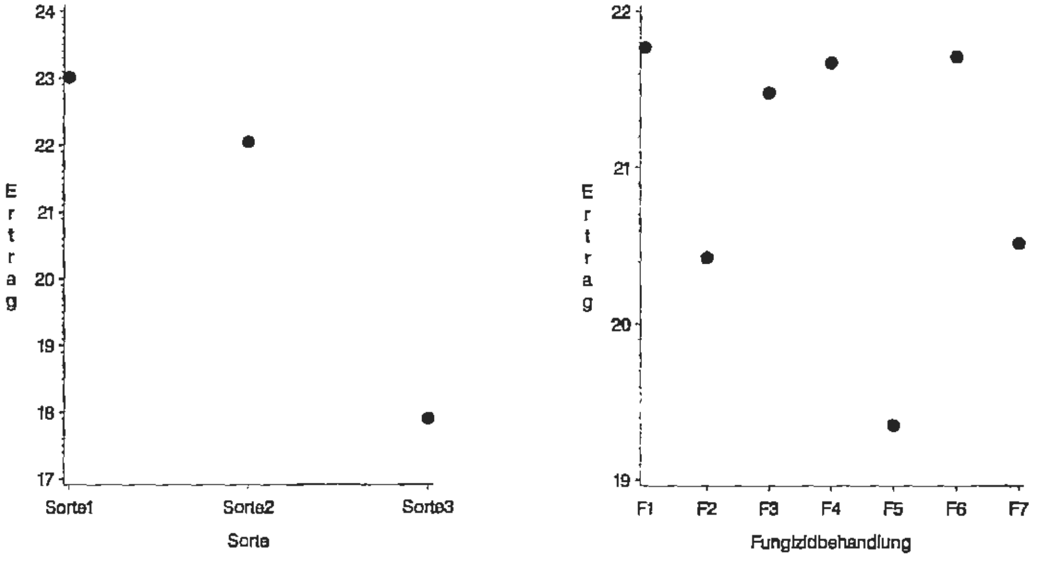


Abb. 10.2: Mittlere Ertragsdaten der Sorten und der Fungizidbehandlungen für das Beispiel 10.1

Papier und Bleistift

Unterschiede zwischen den Sorten - Tukey-Prozedur

Zu vergleichen sind die Mittelwerte

Sorte1 : 161,08 / 7 = 23,01
Sorte2 : 154,36 / 7 = 22,05
Sorte3 : 125,38 / 7 = 17,91

Mit

$a = 3$
$b = 7$
$FG_{Rest} = 12$
$\alpha = 0,05$
$q_{0,95;3,12} = 3,773$ (s. Tab. 8.6)
$s_{Rest} = \sqrt{s^2_{Rest}} = \sqrt{0,556} = 0,746$

ist die Grenzdifferenz:

$HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;\, a, FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{b} \quad = 3,773*0,746 / \sqrt{7} = 1,064$.

	$\bar{y}_{i\bullet}$		$\bar{y}_{i'\bullet}$	$\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}$	(1-α)-Konfidenzintervall		Test
					untere Grenze	obere Grenze	
Sorte1	23,01	Sorte2	22,05	0,96	-0,10	2,02	nicht signifikant
		Sorte3	17,91	5,10	4,04	6,16	signifikant
Sorte2	22,05	Sorte3	17,91	4,14	3,08	5,20	signifikant

Da die Konfidenzintervalle für den Vergleich mit der Sorte3 die Null nicht beinhalten, bestätigt sich die Vermutung: die Sorte3 unterscheidet sich in ihrem mittleren Ertrag signifikant von den beiden anderen Sorten. Die Methode der Verbindungslinien zeigt dasselbe Ergebnis:

Sorte1	Sorte2	Sorte3
23,01	22,05	17,91

Ertragserhöhung durch Fungizidbehandlungen im Vergleich zur UK - Dunnett-Prozedur

Die Mittelwerte

F1	F3	F4	F5	F6	F7
65,32 / 3 = 21,77	64,44 / 3 = 21,48	65,02 / 3 = 21,67	58,06 / 3 = 19,35	65,14 / 3 = 21,71	61,56 / 3 = 20,52

sollen mit dem Mittelwert der unbehandelten Kontrolle (F2 = UK) : 61,28 / 3 = 20,43 verglichen werden.

Mit

$a = 3$ $\quad FG_{Rest} = 12$ $\quad |d|_{0,95;6,12} = 2{,}576$ (s. Tab. 8.7 b)

$b = 7$ $\quad \alpha = 0{,}05$ $\quad s_{Rest} = \sqrt{s^2_{Rest}} = \sqrt{0{,}556} = 0{,}746$

$k = 7 - 1 = 6$

ist die Grenzdifferenz:

$$DSD_{\alpha;b-1} = |d|_{1-\alpha;b-1,FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{a}} = 2{,}576 * 0{,}746\sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}57 .$$

Addiert man zum Mittelwert der UK den Wert der Grenzdifferenz (halbe Breite des Konfidenzintervalls) hinzu: 20,43 + 1,57 = 22,00 , dann ist zu erkennen, daß bei einer einseitigen Betrachtung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ kein mittlerer Ertragswert größer ist, als diese Grenze. Ein signifikanter Unterschied von Fungizidbehandlungen zur unbehandelten Kontrolle kann folglich nicht aufgezeigt werden. (Um einen Unterschied nachzuweisen, ist der Stichprobenumfang zu gering; er ist nicht optimal gewählt worden.)

SAS

Das SAS-Programm wird in der Prozedur `glm` um die Befehlszeilen zur Realisierung der multiplen Mittelwertvergleiche erweitert:

```
proc glm data=bsp101;
  class sorte behandlg;
  model ertrag = sorte behandlg / ss3;
  means sorte;   means behandlg;
  means sorte / tukey cldiff;             Faktor A : Tukey-Prozedur (α=0,05) mit Konfidenzintervall
  means sorte / tukey lines;              Faktor A : Tukey-Prozedur (α=0,05) , Verbindungslinien
  means behandlg /dunnettu('F2') cldiff;  Faktor B : Dunnett-Prozedur (α=0,05, einseitig)
                                                     mit Konfidenzintervall
run;  quit;
```

Das um die Varianztabelle und um die Angabe der Mittelwerte und Standardabweichung (s. o.) verkürzte SAS-Output lautet:

```
General Linear Models Procedure

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: ERTRAG
NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 12  MSE= 0.555711
Critical Value of Studentized Range= 3.773
Minimum Significant Difference= 1.063
```

```
Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                     Simultaneous              Simultaneous
                         Lower    Difference       Upper
      SORTE           Confidence    Between     Confidence
    Comparison           Limit       Means         Limit

Sorte1 - Sorte2        -0.1030       0.9600       2.0230
Sorte1 - Sorte3         4.0370       5.1000       6.1630    ***

Sorte2 - Sorte1        -2.0230      -0.9600       0.1030
Sorte2 - Sorte3         3.0770       4.1400       5.2030    ***

Sorte3 - Sorte1        -6.1630      -5.1000      -4.0370    ***
Sorte3 - Sorte2        -5.2030      -4.1400      -3.0770    ***

General Linear Models Procedure

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: ERTRAG
NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate,
      but generally has a higher type II error rate than REGWQ.

Alpha= 0.05  df= 12  MSE= 0.555711
Critical Value of Studentized Range= 3.773
Minimum Significant Difference= 1.063

Means with the same letter are not significantly different.

Tukey Grouping              Mean       N  SORTE

                  A           23.0114       7  Sorte1
                  A
                  A           22.0514       7  Sorte2

                  B           17.9114       7  Sorte3


General Linear Models Procedure

Dunnett's One-tailed T tests for variable: ERTRAG
NOTE: This tests controls the type I experimentwise error for
      comparisons of all treatments against a control.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 12  MSE= 0.555711
Critical Value of Dunnett's T= 2.576
Minimum Significant Difference= 1.568

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                 Simultaneous              Simultaneous
                     Lower    Difference       Upper
   BEHANDLG       Confidence    Between     Confidence
  Comparison         Limit       Means         Limit

F1    - F2         -0.2213       1.3467       2.9146
F6    - F2         -0.2813       1.2867       2.8546
F4    - F2         -0.3213       1.2467       2.8146
F3    - F2         -0.5146       1.0533       2.6213
F7    - F2         -1.4746       0.0933       1.6613
F5    - F2         -2.6413      -1.0733       0.4946
```

Aufgabe 10.1: Für die drei Schichten eines Werkes sind für eine zufällig ausgewählte Woche folgende Produktionsmengen (in Tonnen) bekannt[25]

	Frühschicht	Tagesschicht	Spätschicht
Montag	8,1	8,8	8,0
Dienstag	9,3	9,4	8,5
Mittwoch	9,5	8,6	8,7
Donnerstag	8,2	8,3	8,7
Freitag	7,8	8,1	7,7

Gibt es hinsichtlich der Produktionsmengen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ signifikante Unterschiede zwischen den Wochentagen und den Schichten?

10.1.2 Vollständige Kreuzklassifikation mit Wiederholung

Der Prüffaktor A hat a Stufen (i = 1, 2, ..., a) und der Prüffaktor B b (j = 1, 2, ..., b). Wenn in jeder *a b* - Stufenkombination mehrerer Beobachtungswerte vorkommen, wird von einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung gesprochen.
Das allgemeine Schema hat folgende Form:

		Stufen des Faktors B					
		1	2	•••	j	•••	b
Stufen des Faktors A	1	y_{111}	y_{121}		y_{1j1}		y_{1b1}
		y_{112}	y_{122}		y_{1j2}		y_{1b2}
		•••	•••	•••	•••	•••	•••
		$y_{11n_{11}}$	$y_{12n_{12}}$		$y_{1jn_{1j}}$		$y_{1bn_{1b}}$
	2	y_{211}	y_{221}		y_{2j1}		y_{2b1}
		y_{212}	y_{222}		y_{2j2}		y_{2b2}
		•••	•••	•••	•••	•••	•••
		$y_{21n_{21}}$	$y_{22n_{22}}$		$y_{2jn_{2j}}$		$y_{2bn_{2b}}$
	•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••
	i	y_{i11}	y_{i21}		y_{ij1}		y_{ib1}
		y_{i12}	y_{i22}		y_{ij2}		y_{ib2}
		•••	•••	•••	•••	•••	•••
		$y_{i1n_{i1}}$	$y_{i2n_{i2}}$		$y_{ijn_{ij}}$		$y_{ibn_{ib}}$
	•••	•••	•••	•••	•••	•••	•••
	a	y_{a11}	y_{a21}		y_{aj1}		y_{ab1}
		y_{a12}	y_{a22}		y_{aj2}		y_{ab2}
		•••	•••	•••	•••	•••	•••
		$y_{a1n_{a1}}$	$y_{a2n_{a2}}$		$y_{ajn_{aj}}$		$y_{abn_{ab}}$

Die Bezeichnung für die Prüffaktoren A und B ist vertauschbar.

Das Varianzanalysemodell wird um einen Term, der Wechselwirkung der i-ten Stufe des Faktors A mit der j-ten Stufe des Faktors B $w_{ij} = (ab)_{ij}$, erweitert. Es gelten für das Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung

[25] Daten aus:
BOSCH, K.: Großes Lehrbuch der Statistik
R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1996, S. 504, Aufgabe 11.3

- das lineare, additive Modell $\boxed{y_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}}$ mit
  μ: Erwartungswert der Grundgesamtheit des Versuches,
  a_i: Effekt der i-ten Stufe des Prüffaktors A
  b_j : Effekt der j-ten Stufe des Prüffaktors B
  $(ab)_{ij}$: Wechselwirkungseffekt der i-ten Stufe des Prüffaktors A mit der j-ten Stufe des Prüffaktors B
- der Fehlerterm ε_{ijk} ist eine unabhängige Zufallsvariable
- der Erwartungswert der Fehlerkomponente ist Null: $E(\varepsilon_{ijk}) = 0$
- die Varianzen der ε_{ijk} sind für alle i und j gleich: $VAR(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2$
- die Zufallsvariable ε_{ijk} ist normalverteilt
- und die Reparametrisierungsbedingungen $\sum_{i=1}^{a} a_i = \sum_{j=1}^{b} b_j = \sum_{i=1}^{a} (ab)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (ab)_{ij} = 0$.

10.1.2.1 Varianztabelle

Die zu testenden Hypothesen werden gegenüber dem Varianzanalysemodell mit einer Besetzung um die Hypothesen über die Wechselwirkungen erweitert:

über den Faktor A:	$H_0 : a_i = 0$ $i = 1, 2, ..., a$	gegen die Alternativhypothese	$H_A : a_i \neq 0$ für mindestens ein i ($i = 1, 2, ..., a$)
über den Faktor B:	$H_0 : b_j = 0$ $j = 1, 2, ..., b$	gegen die Alternativhypothese	$H_A : b_j \neq 0$ für mindestens ein j ($j = 1, 2, ..., b$)
über die Wechselwirkung	$H_0 : (ab)_{ij} = 0$ $i = 1, 2, ..., a$ $j = 1, 2, ..., b$	gegen die Alternativhypothese	$H_A : (ab)_{ij} \neq 0$ für mindestens ein i,j ($i = 1, 2, ..., a$, $j = 1, 2, ..., b$)

Die Prüfung dieser Hypothesen wird mit Hilfe des F-Tests vorgenommen. Einschränkend, daß die Anzahl der Wiederholungen gleich ist: $n_{ij} = n$ für alle $i = 1, 2, ..., a$, $j = 1, 2, ..., b$, hat die Varianztabelle für das Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit (gleicher) Wiederholung folgendes allgemeine Aussehen:

Varianzursache	Freiheitsgrade FG	Summe der Abweichungsquadrate SQ	mittlere quadratische Abweichung MQ	Testgröße F	erwartete mittlere quadratische Abweichung E(MQ)
gesamt	N - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$			
zwischen den Stufen des Faktors A	a - 1	$bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\frac{MQ_A}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1}\sum_{i=1}^{a} a_i^2$
zwischen den Stufen des Faktors B	b - 1	$an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet j\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_B}{FG_B}$	$\frac{MQ_B}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2 + \frac{an}{b-1}\sum_{j=1}^{b} b_j^2$
Wechselwirkung AxB	(a-1)(b-1)	$n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\bullet}-\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet j\bullet}+\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_{AxB}}{FG_{AxB}}$	$\frac{MQ_{AxB}}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(ab)_{ij}^2$
Rest	N - ab	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\bullet})^2$	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$		σ^2

$$N = \sum_{i,j} n_{ij} = a * b * n$$

Beispiel 10.2

In vier landwirtschaftlichen Betrieben wurden sechs Sorten Wintergerste auf jeweils drei Schlägen angebaut. Hinsichtlich der mittleren Erträge (in kg/ha) soll geprüft werden, ob bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α=0.05 Unterschiede zwischen den Sorten und Betrieben bestehen[26].

Betrieb	Schlag	Sorte1	Sorte2	Sorte3	Sorte4	Sorte5	Sorte6
1	1	32	48	25	38	34	29
	2	28	52	25	38	27	27
	3	30	47	34	44	38	31
2	1	44	55	28	39	21	31
	2	43	53	26	38	30	33
	3	48	57	33	37	36	26
3	1	42	64	40	53	38	37
	2	42	64	42	41	29	33
	3	39	64	47	47	23	32
4	1	44	59	34	54	33	31
	2	40	58	27	50	36	30
	3	42	57	32	46	36	35

Papier und Bleistift

Zunächst werden einige Summen und das Subtraktionsglied *Sgl* gebildet.

Betrieb		Sorte1	Sorte2	Sorte3	Sorte4	Sorte5	Sorte6	$\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$	$\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2$
1	$\sum_{k=1}^{n} y_{1jk}$	90	147	84	120	99	87	627	393129
	$\left(\sum_{k=1}^{n} y_{1jk}\right)^2$	8100	21609	7056	14400	9801	7569		
2	$\sum_{k=1}^{n} y_{2jk}$	135	165	87	114	87	90	678	459684
	$\left(\sum_{k=1}^{n} y_{2jk}\right)^2$	18225	27225	7569	12996	7569	8100		
3	$\sum_{k=1}^{n} y_{3jk}$	123	192	129	141	90	102	777	603729
	$\left(\sum_{k=1}^{n} y_{3jk}\right)^2$	15129	36864	16641	19881	8100	10404		
4	$\sum_{k=1}^{n} y_{4jk}$	126	174	93	150	105	96	744	553536
	$\left(\sum_{k=1}^{n} y_{4jk}\right)^2$	15876	30276	8649	22500	11025	9216		
								$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$	$\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2$
	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$	474	678	393	525	381	375	2826	7986276
	$\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2$	224676	459684	154449	275625	145161	140625		

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 = 118940$$

[26] Beispiel 8.5 aus:
RASCH, D.: Biometrie. Einführung in die Biostatistik
VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1983, S. 173 f

$a = 4 \qquad b = 6 \qquad n = 3$

$N = a * b * n = 4 * 6 * 3 = 72$

$$Sgl = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 = 7986276 / 72 = 110920{,}5$$

$$SQ_{gesamt} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - Sgl = 118940 - 110920{,}5 = 8019{,}5$$

$$SQ_A = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 - Sgl$$

$$= (393129 + 459684 + 603729 + 553536) / (6 * 3) - 110920{,}5 = 750{,}5$$

$$SQ_B = an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 - Sgl$$

$$= (224676 + 459684 + 154449 + 275625 + 145161 + 140625) / (4 * 3) - 110920{,}5 = 5764{,}5$$

$$SQ_{AxB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 - Sgl - SQ_A - SQ_B$$

$$\begin{aligned} &= (8100 + 21609 + 7056 + 14400 + 9801 + 7569 \\ &+ 18225 + 27225 + 7569 + 12996 + 7569 + 8100 \\ &+ 15129 + 36864 + 16641 + 19881 + 8100 + 10404 \\ &+ 15876 + 30276 + 8649 + 22500 + 11025 + 9216) / 3 - 110920{,}5 - 750{,}5 - 5764{,}5 = 824{,}5 \end{aligned}$$

$$SQ_{Rest} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet}\right)^2 = SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B - SQ_{AxB}$$

$$= 8019{,}5 - 750{,}5 - 5764{,}5 - 824{,}5 = 680{,}0$$

$FG_{gesamt} = N - 1 = 72 - 1 = 71$

$FG_A = a - 1 = 4 - 1 = 3$

$FG_B = b - 1 = 6 - 1 = 5$

$FG_{AxB} = (a - 1)(b - 1) = 3 * 5 = 15$

$FG_{Rest} = N - a * b = 72 - 4 * 6 = 48$

$$MQ_{gesamt} = s^2 = \frac{SQ_{gesamt}}{FG_{gesamt}} = 8019{,}5 / 71 = 112{,}95$$

$$MQ_A = s_A^2 = \frac{SQ_A}{FG_A} = 750{,}5 / 3 = 250{,}17$$

$$MQ_B = s_B^2 = \frac{SQ_B}{FG_B} = 5764{,}5 / 5 = 1152{,}90$$

$$MQ_{AxB} = s_{AxB}^2 = \frac{SQ_{AxB}}{FG_{AxB}} = 824{,}5 / 15 = 54{,}97$$

$$MQ_{Rest} = s_{Rest}^2 = \frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}} = 680{,}0 / 48 = 14{,}17$$

$$F_A = \frac{MQ_A}{MQ_{Rest}} = 250{,}17 / 14{,}17 = 17{,}65$$

$$F_B = \frac{MQ_B}{MQ_{Rest}} = 1152{,}90 / 14{,}17 = 81{,}36$$

$$F_{AxB} = \frac{MQ_{AxB}}{MQ_{Rest}} = 54{,}97 / 14{,}17 = 3{,}88$$

Folglich lautet die Varianztabelle:

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;FG_1,FG_{Rest}}$	Test
Gesamt	71	8019,5				
Faktor A (Betriebe)	3	750,5	250,17	17,65	2,798	signifikant
Faktor B (Sorten)	5	5764,5	1152,90	81,36	2,409	signifikant
Wechselwirkung A x B	15	854,5	54,97	3,88	1,880	signifikant
Rest	48	680,0	14,17			

Die F-Quantile sind: $F_{1-\alpha;3,48} = 2{,}798$, $F_{1-\alpha;5,48} = 2{,}409$ und $F_{1-\alpha;15,48} = 1{,}880$ (Tab. 8.4 b oder SAS-Funktion `finv(0.95,FG_i,FG_Rest)`).

Hinsichtlich des mittleren Ertrages
- unterscheidet sich einer der Betriebe von den beiden anderen signifikant,
- mindestens eine Sorte ist von den anderen verschieden,
- diese Signifikanzentscheidungen sind nicht unabhängig voneinander zu betrachten, weil auch die Wechselwirkung signifikante Unterschiede liefert.

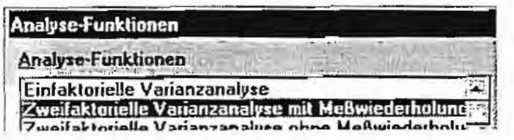
EXCEL

Die Daten müssen so aufgeführt sein, daß (nur) in der ersten Zeile und in der ersten Spalte die alphanumerische Bezeichnung der Stufen der Prüffaktoren stehen:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Betrieb	Sorte1	Sorte2	Sorte3	Sorte4	Sorte5	Sorte6
2	1	32	48	25	38	34	29
3	1	28	52	25	38	27	27
4	1	30	47	34	44	38	31
5	2	44	55	28	39	21	31
6	2	43	53	26	38	30	33
7	2	48	57	33	37	36	26
8	3	42	64	40	53	38	37
9	3	42	64	42	41	29	33
10	3	39	64	47	47	23	32
11	4	44	59	34	54	33	31
12	4	40	58	27	50	36	30
13	4	42	57	32	46	36	35

Die Analyse-Funktion zur Realisierung der zweifaktoriellen Varianzanalyse wird im Pull-Down-Menü Extras ausgewählt:

Analyse-Funktionen...
  Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Meßwertwiederholung



Im Vorfeld der Varianztabelle weist EXCEL neben anderen statistischen Maßzahlen auch die Varianzen jeder Stufe der Prüffaktoren und über alle Stufen hinweg aus:

Anova: Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung

ZUSAMMENFASSUNG	Sorte1	Sorte2	Sorte3	Sorte4	Sorte5	Sorte6	Gesamt
1							
Anzahl	3	3	3	3	3	3	18
Summe	90	147	84	120	99	87	627
Mittelwert	30	49	28	40	33	29	209
Varianz	4	7	27	12	31	4	85
2							
Anzahl	3	3	3	3	3	3	18
Summe	135	165	87	114	87	90	678
Mittelwert	45	55	29	38	29	30	226
Varianz	7	4	13	1	57	13	95
3							
Anzahl	3	3	3	3	3	3	18
Summe	123	192	129	141	90	102	777
Mittelwert	41	64	43	47	30	34	259
Varianz	3	0	13	36	57	7	116
4							
Anzahl	3	3	3	3	3	3	18
Summe	126	174	93	150	105	96	744
Mittelwert	42	58	31	50	35	32	248
Varianz	4	1	13	16	3	7	44
Gesamt							
Anzahl	12	12	12	12	12	12	
Summe	474	678	393	525	381	375	
Mittelwert	158	226	131	175	127	125	
Varianz	18	12	66	65	148	31	

ANOVA

Streuungs-ursache	*Quadrat-summen (SS)*	*Freiheits-grade (df)*	*Mittl. Quadrat-summe (MS)*	*Prüfgröße (F)*	*P-Wert*	*kritischer F-Wert*
Stichprobe	750,50	3	250,167	17,659	7,334E-08	2,798
Spalten	5764,50	5	1152,900	81,381	2,950E-22	2,409
Wechselwirkung	824,50	15	54,967	3,880	1,688E-04	1,880
Fehler	680,00	48	14,167			
Gesamt	8019,50	71				

SAS

```
data bsp102;
  input betrieb schlag sorte1-sorte6;
  sorte='Sorte1'; ertrag=sorte1; output;
  sorte='Sorte2'; ertrag=sorte2; output;
  sorte='Sorte3'; ertrag=sorte3; output;
  sorte='Sorte4'; ertrag=sorte4; output;
  sorte='Sorte5'; ertrag=sorte5; output;
  sorte='Sorte6'; ertrag=sorte6; output;
cards;
1   1   32   48   25   38   34   29
1   2   28   52   25   38   27   27
1   3   30   47   34   44   38   31
2   1   44   55   28   39   21   31
2   2   43   53   26   38   30   33
2   3   48   57   33   37   36   26
3   1   42   64   40   53   38   37
3   2   42   64   42   41   29   33
3   3   39   64   47   47   23   32
4   1   44   59   34   54   33   31
4   2   40   58   27   50   36   30
4   3   42   57   32   46   36   35
;
proc glm data=bsp102;
  class betrieb sorte;                          class Faktor_A  Faktor_B
  model ertrag=betrieb sorte betrieb*sorte;     model Prüfmerkmal=
                                                      Faktor_A Faktor_B Faktor_A*Faktor_B
run; quit;
```

Die im SAS-Output aufgelisteten Ergebnisse entsprechen den obigen.

```
General Linear Models Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
BETRIEB        4    1 2 3 4
SORTE          6    Sorte1 Sorte2 Sorte3 Sorte4 Sorte5 Sorte6

Number of observations in data set = 72

General Linear Models Procedure
Dependent Variable: ERTRAG

Source                  DF    Sum of Squares   F Value     Pr > F
Model                   23     7339.50000000     22.53     0.0001
Error                   48      680.00000000
Corrected Total         71     8019.50000000

                  R-Square              C.V.          ERTRAG Mean
                  0.915207          9.589461           39.2500000

Source                  DF       Type I SS   F Value     Pr > F
BETRIEB                  3    750.50000000     17.66     0.0001
SORTE                    5   5764.50000000     81.38     0.0001
BETRIEB*SORTE           15    824.50000000      3.88     0.0002

Source                  DF     Type III SS   F Value     Pr > F
BETRIEB                  3    750.50000000     17.66     0.0001
SORTE                    5   5764.50000000     81.38     0.0001
BETRIEB*SORTE           15    824.50000000      3.88     0.0002
```

10.1.2.2 Konfidenzintervalle der Mittelwerte

Es sind die Mittelwerte der Stufen des Prüffaktors A, die des Faktors B und die der Stufenkombinationen beider Faktoren zu betrachten. Für diese Mittelwerte werden (bei gleichem Stichprobenumfang n) die (1-α)-Konfidenzintervalle geschätzt nach

für die Mittelwerte des Faktors A:

$$\left\langle \bar{y}_{i\bullet} - t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{bn}}\,;\ \bar{y}_{i\bullet} + t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{bn}} \right\rangle \quad (i = 1, 2, ..., a)$$

für die Mittelwerte des Faktors B:

$$\left\langle \bar{y}_{\bullet j} - t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{an}}\,;\ \bar{y}_{\bullet j} + t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{an}} \right\rangle \quad (j = 1, 2, ..., b)$$

für die Mittelwerte der Stufenkombination der Faktoren A und B:

$$\left\langle \bar{y}_{ij} - t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}}\,;\ \bar{y}_{ij} + t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest}\sqrt{\frac{2}{n}} \right\rangle \quad (i = 1, 2, ..., a\,;\ j = 1, 2, ..., b) \quad .$$

Die zweiseitigen (1-α)-Konfidenzintervalle der Mittelwerte für die Daten des Beispiels 10.2 lauten:

Ertragsmittelwert des Betriebes		Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze
1	34,83	32,31	37,36
2	37,67	35,14	40,19
3	43,17	40,64	45,69
4	41,33	38,81	43,86

Sorten-Mittelwerte		Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze
Sorte1	39,50	36,41	42,59
Sorte2	56,50	53,41	59,59
Sorte3	32,75	29,66	35,84
Sorte4	43,75	40,66	46,84
Sorte5	31,75	28,66	34,84
Sorte6	31,25	28,16	34,34

Betrieb x Sorten-Mittelwerte		Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze
Betrieb 1 / Sorte1	30	23,82	36,18
Betrieb 1 / Sorte2	49	42,82	55,18
Betrieb 1 / Sorte3	28	21,82	34,18
Betrieb 1 / Sorte4	40	33,82	46,18
Betrieb 1 / Sorte5	33	26,82	39,18
Betrieb 1 / Sorte6	29	22,82	35,18
Betrieb 2 / Sorte1	45	38,82	51,18
Betrieb 2 / Sorte2	55	48,82	61,18
Betrieb 2 / Sorte3	29	22,82	35,18
Betrieb 2 / Sorte4	38	31,82	44,18
Betrieb 2 / Sorte5	29	22,82	35,18
Betrieb 2 / Sorte6	30	23,82	36,18
Betrieb 3 / Sorte1	41	34,82	47,18
Betrieb 3 / Sorte2	64	57,82	70,18
Betrieb 3 / Sorte3	43	36,82	49,18
Betrieb 3 / Sorte4	47	40,82	53,18
Betrieb 3 / Sorte5	30	23,82	36,18
Betrieb 3 / Sorte6	34	27,82	40,18
Betrieb 4 / Sorte1	42	35,82	48,18
Betrieb 4 / Sorte2	58	51,82	64,18
Betrieb 4 / Sorte3	31	24,82	37,18
Betrieb 4 / Sorte4	50	43,82	56,18
Betrieb 4 / Sorte5	35	28,82	41,18
Betrieb 4 / Sorte6	32	25,82	38,18

wobei
$a = 4$
$b = 6$
$n = 3$
$s_{Rest} = 3{,}764$
$t_{0,975;\,48} = 2{,}011$

Die grafische Darstellung in der Abb. 10.3 veranschaulicht die Konfidenzintervalle der Mittelwerte besser.

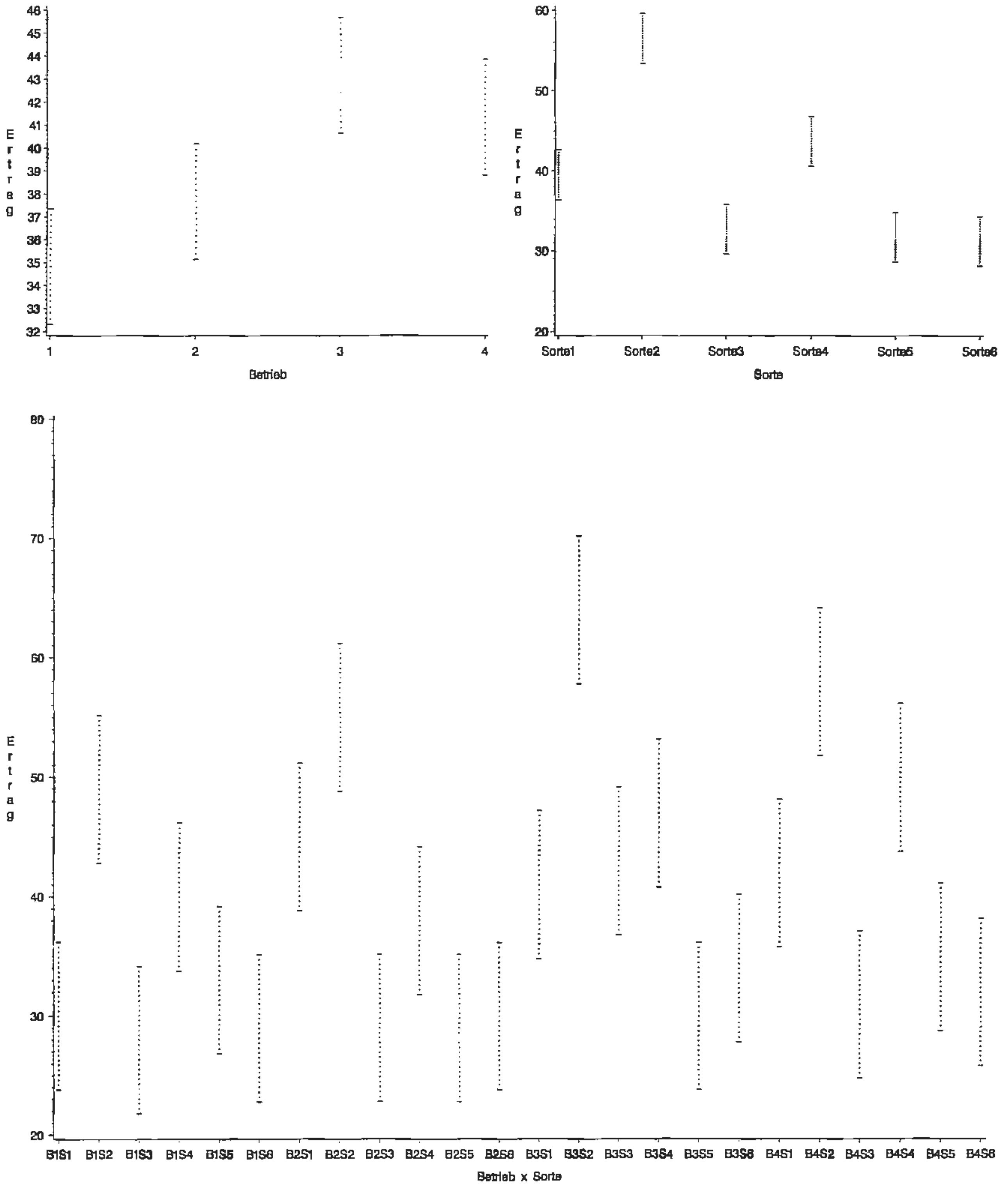


Abb. 10.3: Konfidenzintervalle der mittleren Erträge der Betriebe, Sorten und Betriebe x Sorten

Gut erkennbar ist, daß Sorte2 bezüglich des mittleren Ertrages „weit entfernt" von den anderen Sorten liegt. Ein Blick auf das untere Teilbild der Abb. 10.3 zeigt, daß besonders die Sorte1 nur im Betrieb 1 zu Sorten mit niedrigen Erträgen und die Sorte3 nur im Betrieb 3 mit mittlerem Ertrag auftritt, während sie für die anderen Betriebe im unteren Ertragsniveau zu finden ist. Das läßt signifikante Wechselwirkungen vermuten. Die Varianztabelle weist sie aus.

10.1.2.3 Multiple Mittelwertvergleiche

Für das Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung sind zum multiplen Vergleich der Mittelwerte Hypothesen über die Stufen des Faktors A, die des Faktors B und über die Wechselwirkungen zu testen:

H_0^A : $a_i = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots a$
H_0^B : $b_j = 0$ für alle $j = 1, 2, \ldots b$.
H_0^{AxB} : $(ab)_{ij} = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots a$, $j = 1, 2, \ldots b$.

Diese Nullhypothesen werden gegen die Alternativhypothesen

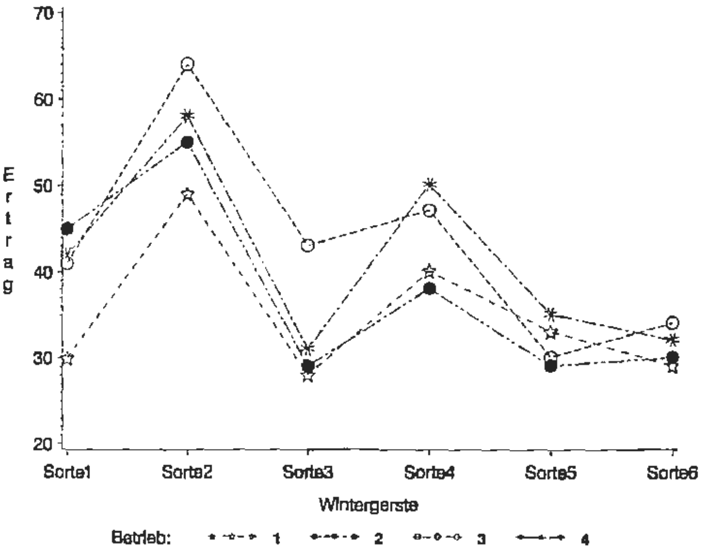
H_A^A : $a_i \neq 0$ für mindestens ein i: $i = 1, 2, \ldots a$
H_A^B : $b_j \neq 0$ für mindestens ein j: $j = 1, 2, \ldots b$
H_A^{AxB} : $(ab)_{ij} \neq 0$ für mindestens ein $i = 1, 2, \ldots a$, $j = 1, 2, \ldots b$.

getestet.

Zunächst stellen sich die Fragen:
- Was ist unter einer Wechselwirkung der Stufe des einen Faktors mit einer Stufe des anderen Faktors zu verstehen?
- Welche Auswirkungen hat eine signifikante Wechselwirkung?

Für die Beantwortung soll das Beispiel 10.2 herangezogen werden. Die Abb. 10.4[27] zeigt die mittleren Ertragsdaten je Sorte Wintergerste und je Betrieb. Die Stufen der Prüffaktoren Sorte und Betrieb sind diskret. Es kann also keine Verbindungslinie zwischen den Stufen gezeichnet werden. Die eingezeichneten Linien haben nur den Zweck, die Lage der Mittelwerte besser zu verdeutlichen!

Abb. 10.4: Mittlere Ertragsdaten je Sorte und Betrieb (Beispiel 10.2)



[27] SAS-Programm:
```
proc sort data=bsp102;
  by betrieb sorte;
proc means data=bsp102;
  var ertrag;
  by betrieb sorte;
  output out=smean mean=sm;
symbol1 c=black h=2.2 v==      l=20 i=join;
symbol2 c=black h=2.2 v=dot    l=14 i=join;
symbol3 c=black h=2.2 v=circle l=3  i=join;
symbol4 c=black h=2.2 v=:      l=8  i=join;
legend1 value=(h=1.3 f=swissb);
goptions htext=1.5 ftext=swiss;
proc gplot data =smean;
  label sm  ='Ertrag' sorte='Wintergerste'  betrieb='Betrieb:';
  plot sm*sorte=betrieb
       / legend=legend1 ;
run;  quit;
```

Werden je Sorte die mittleren Ertragsdaten der vier Betriebe der Größe nach sortiert, dann weisen die drei Sorten Sorte2, Sorte3 und Sorte6 eine Rangfolge auf, von der sich die anderen drei Sorten unterscheiden. Es läßt sich also vermuten, daß es spezifische „Reaktionen" gibt, die auf das Zusammentreffen einer bestimmten Stufe des einen mit einer bestimmten Stufe des anderen Faktors zurückzuführen sind. Die Sorte1 erreicht nur im Betrieb2 ihren Maximalertrag und der Betrieb4 weist fast immer die höchsten Erträge aus, allerdings nimmt er bei Sorte1 und Sorte5 nur die dritte Ertragsposition ein. (s. a. Abb. 10.3 und 10.4).

Sorte2	Sorte3	Sorte6	Sorte4	Sorte1	Sorte5
Betrieb3	Betrieb3	Betrieb3	Betrieb4	Betrieb2	Betrieb4
Betrieb4	Betrieb4	Betrieb4	Betrieb3	Betrieb4	Betrieb1
Betrieb2	Betrieb2	Betrieb2	Betrieb1	Betrieb3	Betrieb3
Betrieb1	Betrieb1	Betrieb1	Betrieb2	Betrieb1	Betrieb2

Solange die Wechselwirkungen zwischen den beiden Prüffaktoren im Zufälligen liegen, also keine signifikanten Unterschiede zwischen den einzelnen Wechselwirkungen nachgewiesen werden können, lassen sich die Hauptwirkungen einzeln testen (unter Hauptwirkungen werden die durch die beiden Prüffaktoren A und B hervorgerufenen Effekte verstanden). Eine signifikante Wechselwirkung bewirkt aber gerade, daß auch in der Hauptwirkung Signifikanz aufgezeigt wird. Deshalb ist es (in der Regel) sachlogisch unsinnig, bei signifikanter Wechselwirkung Unterschiede im mittleren Verhalten der Stufen der Faktoren nachzuweisen.

Um für das Beispiel 10.2 Unterschiede im mittleren Ertragsniveau der Betriebe (Faktor A) zu testen, werden die vier Betriebe je Sorte geprüft, indem bei fester Sorte die Mittelwerte der Kombination Betrieb x Sorte verglichen werden. Allgemein bedeutet das, daß die mittlere Wirkung der Stufen des Faktors A (Beispiel 10.2: Betriebe) durch den Vergleich der AB-Mittelwerte auf gleicher Stufe von B (Beispiel 10.2: Sorten) getestet wird.

Entsprechend dieser Testmöglichkeiten müssen auch die Grenzdifferenzen (halbe Breite des Konfidenzintervalls) berechnet werden. Die Tabelle 10.2 gibt einen Überblick über die Berechnung der Grenzdifferenzen gemäß der einzelnen Hypothesen (s. o.) und multiplen Mittelwertprozeduren. Für die Spannweitenprozeduren können die gestaffelten Grenzdifferenzen abgeleitet werden.

Tabelle 10.2: Übersicht über die Berechnung der Grenzdifferenzen für das zweifaktorielle Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung

multiple Vergleichsprozedur	Grenzdifferenz
multipler t-Test	$LSD_{\alpha} = t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest} * \sqrt{2}\, c$
Bonferroni-Fisher-Prozedur	$FSD_{\alpha;m} = t_{1-\alpha/(2*m);FG_{Rest}} * s_{Rest} * \sqrt{2}\, c$
Tukey-Prozedur	$HSD_{\alpha;g} = q_{1-\alpha;g,FG_{Rest}} * s_{Rest} * c$
Dunnett-Prozedur, zweiseitig	$DSD_{\alpha;g-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha/2;g-1,FG_{Rest}} * s_{Rest} * \sqrt{2}\, c$
Dunnett-Prozedur, einseitig	$DSD_{\alpha;g-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha;g-1,FG_{Rest}} * s_{Rest} * \sqrt{2}\, c$

mit

Vergleich der Mittelwerte	g	m	c
A	a	a(a-1)/2	$1/\sqrt{bn}$
B	b	b(b-1)/2	$1/\sqrt{an}$
AB auf gleicher Stufe von A AB auf gleicher Stufe von B AB (allgemein)	ab	ab(ab-1)/2	$1/\sqrt{n}$

Papier und Bleistift

Unterschiede zwischen den Betrieben - Tukey-Prozedur

Die Wechselwirkung Betriebe x Sorten ist signifikant! Das bedeutet, daß ein Vergleich der mittleren Erträge der Betriebe (ohne Berücksichtigung der Sorten) unsinnig ist. Für jede Sorte können nur die Mittelwerte der Faktorenkombination aus Betrieb und Sorte geprüft werden. Um die mittlere Wirkung der Stufen des Faktors A (Betriebe) zu testen müssen folglich die AB-(Betriebe-Sorten-) Mittelwerte auf gleicher Stufe von B (Sorte) verglichen werden. Es ist die Grenzdifferenz

$$HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ auf gleicher Stufe von B}} = q_{1-\alpha;ab,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n}$$

zu berechnen. Aus der Varianztabelle wird s^2_{Rest} abgelesen: $s^2_{Rest} = MQ_{Rest} = 14{,}167$. Folglich ist $s_{Rest} = 3{,}764$. Mit $a*b = 4*6 = 24$ und $FG_{Rest} = 48$ ist $q_{1-\alpha;ab,FG_{Rest}} = q_{0,95;24,48} = 5{,}451$ (Tab. 8.6 ; SAS-Funktion: `probmc("RANGE",.,0.95,48,24)`). Somit ist

$$HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ auf gleicher Stufe von B}} = q_{1-\alpha;ab,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n} = 5{,}451*3{,}764/\sqrt{3} = 11{,}85$$

Das Signifikanz-„Muster" ist in den einzelnen Sorten verschieden:

Sorte	Betrieb	$\overline{AB}$	Betrieb	$\overline{AB}$	Differenz	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
Sorte1	1	30	2	45	-15	-26,85	-3,15	signifikant
			3	41	-11	-22,85	0,85	nicht signifikant
			4	42	-12	-23,85	-0,15	signifikant
	2	45	3	41	4	-7,85	15,85	nicht signifikant
			4	42	3	-8,85	14,85	nicht signifikant
	3	41	4	42	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
Sorte2	1	49	2	55	-6	-17,85	5,85	nicht signifikant
			3	64	-15	-26,85	-3,15	signifikant
			4	58	-9	-20,85	2,85	nicht signifikant
	2	55	3	64	-9	-20,85	2,85	nicht signifikant
			4	58	-3	-14,85	8,85	nicht signifikant
	3	64	4	58	6	-5,85	17,85	nicht signifikant
Sorte3	1	28	2	29	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
			3	43	-15	-26,85	-3,15	signifikant
			4	31	-3	-14,85	8,85	nicht signifikant
	2	29	3	43	-14	-25,85	-2,15	signifikant
			4	31	-2	-13,85	9,85	nicht signifikant
	3	43	4	31	12	0,15	23,85	signifikant
Sorte4	1	40	2	38	2	-9,85	13,85	nicht signifikant
			3	47	-7	-18,85	4,85	nicht signifikant
			4	50	-10	-21,85	1,85	nicht signifikant
	2	38	3	47	-9	-20,85	2,85	nicht signifikant
			4	50	-12	-23,85	-0,15	signifikant
	3	47	4	50	-3	-14,85	8,85	nicht signifikant
Sorte5	1	33	2	29	4	-7,85	15,85	nicht signifikant
			3	30	3	-8,85	14,85	nicht signifikant
			4	35	-2	-13,85	9,85	nicht signifikant
	2	29	3	30	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
			4	35	-6	-17,85	5,85	nicht signifikant
	3	30	4	35	-5	-16,85	6,85	nicht signifikant
Sorte6	1	29	2	30	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
			3	34	-5	-16,85	6,85	nicht signifikant
			4	32	-3	-14,85	8,85	nicht signifikant
	2	30	3	34	-4	-15,85	7,85	nicht signifikant
			4	32	-2	-13,85	9,85	nicht signifikant
	3	34	4	32	2	-9,85	13,85	nicht signifikant

Deutlich wird das auch mit der Methode der Verbindungslinien:

	Sorte1				Sorte2				Sorte3				Sorte4				Sorte5				Sorte6			
Betrieb	2	4	3	1	3	4	2	1	3	4	2	1	4	3	1	2	4	1	3	2	3	4	2	1
	45	42	41	30	64	58	55	49	43	31	29	28	50	47	40	38	35	33	30	29	34	32	30	29

Unterschiede zwischen den Sorten - Tukey-Prozedur

Aufgrund der signifikanten Wechselwirkung gilt auch für die Sorten, daß ihre mittlere Wirkung nur durch die Mittelwerte der Faktorenkombination aus Betrieb und Sorte für jeden Betrieb (Vergleich der AB-Mittelwerte auf gleicher Stufe von A) eingeschätzt werden kann. Da für die Grenzdifferenz des zweifaktoriellen Varianzanalysemodells mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung gilt

$$HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ auf gleicher Stufe von B}} = HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ auf gleicher Stufe von A}} = HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ (allgemein)}} = q_{1-\alpha;\,ab,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n}$$,

ist $HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ auf gleicher Stufe von A}} = 11{,}85$. Die (1-α)-Konfidenzintervalle lauten:

Betrieb	Sorte	$\overline{AB}$	Sorte	$\overline{AB}$	Differenz	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
1	Sorte1	30	Sorte2	49	-19	-30,85	-7,15	signifikant
			Sorte3	28	2	-9,85	13,85	nicht signifikant
			Sorte4	40	-10	-21,85	1,85	nicht signifikant
			Sorte5	33	-3	-14,85	8,85	nicht signifikant
			Sorte6	29	1	-10,85	12,85	nicht signifikant
	Sorte2	49	Sorte3	28	21	9,15	32,85	signifikant
			Sorte4	40	9	-2,85	20,85	nicht signifikant
			Sorte5	33	16	4,15	27,85	signifikant
			Sorte6	29	20	8,15	31,85	signifikant
	Sorte3	28	Sorte4	40	-12	-23,85	-0,15	signifikant
			Sorte5	33	-5	-16,85	6,85	nicht signifikant
			Sorte6	29	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
	Sorte4	40	Sorte5	33	7	-4,85	18,85	nicht signifikant
			Sorte6	29	11	-0,85	22,85	nicht signifikant
	Sorte5	33	Sorte6	29	4	-7,85	15,85	nicht signifikant
2	Sorte1	45	Sorte2	55	-10	-21,85	1,85	nicht signifikant
			Sorte3	29	16	4,15	27,85	signifikant
			Sorte4	38	7	-4,85	18,85	nicht signifikant
			Sorte5	29	16	4,15	27,85	signifikant
			Sorte6	30	15	3,15	26,85	signifikant
	Sorte2	55	Sorte3	29	26	14,15	37,85	signifikant
			Sorte4	38	17	5,15	28,85	signifikant
			Sorte5	29	26	14,15	37,85	signifikant
			Sorte6	30	25	13,15	36,85	signifikant
	Sorte3	29	Sorte4	38	-9	-20,85	2,85	nicht signifikant
			Sorte5	29	0	-11,85	11,85	nicht signifikant
			Sorte6	30	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
	Sorte4	38	Sorte5	29	9	-2,85	20,85	nicht signifikant
			Sorte6	30	8	-3,85	19,85	nicht signifikant
	Sorte5	29	Sorte6	30	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
3	Sorte1	41	Sorte2	64	-23	-34,85	-11,15	signifikant
			Sorte3	43	-2	-13,85	9,85	nicht signifikant
			Sorte4	47	-6	-17,85	5,85	nicht signifikant
			Sorte5	30	11	-0,85	22,85	nicht signifikant
			Sorte6	34	7	-4,85	18,85	nicht signifikant

	Sorte2	64	Sorte3	43	21	9,15	32,85	signifikant
			Sorte4	47	17	5,15	28,85	signifikant
			Sorte5	30	34	22,15	45,85	signifikant
			Sorte6	34	30	18,15	41,85	signifikant
	Sorte3	43	Sorte4	47	-4	-15,85	7,85	nicht signifikant
			Sorte5	30	13	1,15	24,85	signifikant
			Sorte6	34	9	-2,85	20,85	nicht signifikant
	Sorte4	47	Sorte5	30	17	5,15	28,85	signifikant
			Sorte6	34	13	1,15	24,85	signifikant
	Sorte5	30	Sorte6	34	-4	-15,85	7,85	nicht signifikant
4	Sorte1	42	Sorte2	58	-16	-27,85	-4,15	signifikant
			Sorte3	31	11	-0,85	22,85	nicht signifikant
			Sorte4	50	-8	-19,85	3,85	nicht signifikant
			Sorte5	35	7	-4,85	18,85	nicht signifikant
			Sorte6	32	10	-1,85	21,85	nicht signifikant
	Sorte2	58	Sorte3	31	27	15,15	38,85	signifikant
			Sorte4	50	8	-3,85	19,85	nicht signifikant
			Sorte5	35	23	11,15	34,85	signifikant
			Sorte6	32	26	14,15	37,85	signifikant
	Sorte3	31	Sorte4	50	-19	-30,85	-7,15	signifikant
			Sorte5	35	-4	-15,85	7,85	nicht signifikant
			Sorte6	32	-1	-12,85	10,85	nicht signifikant
	Sorte4	50	Sorte5	35	15	3,15	26,85	signifikant
			Sorte6	32	18	6,15	29,85	signifikant
	Sorte5	35	Sorte6	32	3	-8,85	14,85	nicht signifikant

Die Methode der Verbindungslinien zeigt für jeden Betrieb eine andere Anordnung der Sorten und ein anderes Signifikanz-„Muster".

	Betrieb 1						Betrieb 2						Betrieb 3						Betrieb 4					
Sorte	2	4	5	1	6	3	2	1	4	6	3	5	2	4	3	1	6	5	2	4	1	5	6	3
	49	40	33	30	29	28	55	45	38	30	29	29	64	47	43	41	34	30	58	50	42	35	32	31

Unterschiede zwischen den Kombinationen Betrieb-Sorte - Tukey-Prozedur

Aufgrund der Gleichheit der Grenzdifferenzen für den Vergleich der AB-Mittelwerte im zweifaktoriellen Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung ist auch $HSD^{\overline{AB}(\text{allgemein})}_{\alpha;eb} = 11{,}85$. Die Signifikanzen werden nachfolgend mit der Methode der Verbindungslinien dargestellt, wobei in der ersten Zeile die Kombination aus den Stufen der Faktoren Betrieb und Sorte steht. So bedeutet beispielsweise die Ziffernkombination 32: Betrieb 3 - Sorte2.

Betrieb/Sorte	32	42	22	44	12	34	21	33	41	31	14	24	45	36	15	46	43	11	26	35	16	23	25	13
$\overline{AB}$	64	58	55	50	49	47	45	43	42	41	40	38	35	34	33	32	31	30	30	30	29	29	29	28

SAS

Mit dem SAS-Programm

```
proc glm data=bsp102;
  class betrieb sorte;
  model ertrag=betrieb sorte betrieb*sorte / ss3;
  means betrieb / tukey cldiff nosort;
  means sorte / tukey cldiff nosort;
run;
quit;
```

können nur die Hauptwirkungen, das heißt die mittleren Wirkungen der Stufen der Faktoren A (Betriebe) und B (Sorten) in obiger Form für die Tukey-Prozedur getestet werden. Beachtet werden muß, daß diese Prozedur ohne Berücksichtigung der Tatsache signifikanter Wechselwirkungen durchgeführt wird. Wenn wie im Beispiel 10.2 die Wechselwirkung signifikant ist, kann (im allgemeinen) die mittlere Wirkung der Stufen des Faktors A nur durch den Vergleich der AB-Mittelwerte auf gleicher Stufe von B und die mittlere Wirkung der Stufen des Faktors B nur durch den Vergleich der AB-Mittelwerte auf gleicher Stufe von A vorgenommen werden! Diese Vergleiche werden für das zweifaktorielle Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung in SAS nicht realisiert. Die berechneten Grenzdifferenzen $HSD_{\alpha,a}$ und $HSD_{\alpha,b}$ können bei signifikanter Wechselwirkung nicht herangezogen werden!

<u>Aufgabe 10.2</u>: In einem Gewächshausversuch sollen die Düngung (unbehandelt, Stroh-, Stroh- und PO_4-, Stroh-, PO_4- und Kalkdüngung) und die chemische Behandlung (unbehandelt, N+O, CO_2-Gas, H_2CO_3) hinsichtlich des Ertrages einer Weizensorte verglichen werden, wobei keine spezielle Düngung oder Behandlung Bezugsbasis ist. Die je drei Töpfe (Wiederholungen) wurden zufällig angeordnet[28]. Festgelegt wird die Irrtumswahrscheinlichkeit α=0.05.

	Topf-	chemische Behandlung			
Düngung	Nr.	unbehandelt	N+O	CO_2-Gas	H_2CO_3
	1	21,4	20,9	19,6	17,6
unbehandelt	2	21,2	20,3	18,8	16,6
	3	20,1	19,8	16,4	17,5
	1	12,0	13,6	13,0	13,3
Stroh-	2	14,2	13,3	13,7	14,0
	3	12,1	11,6	12,0	13,9
Stroh-	1	13,5	14,0	12,9	12,4
und PO_4-	2	11,9	15,6	12,9	13,7
düngung	3	13,4	13,8	13,1	13,0
Stroh-, PO_4-	1	12,8	14,1	14,2	12,0
und Kalk-	2	13,8	13,2	13,6	14,6
düngung	3	13,7	15,3	13,3	14,0

[28] Daten aus:
WEBER, E.: Grundriß der Biologischen Statistik, VEB Gustav Fischer Verlag, Jena, 9. Aufl., 1986, S. 292

10.1.2.4 Wenn die Wechselwirkung nicht signifikant ist

Wenn die Wechselwirkung nicht signifikant ist, sind folgende Überlegungen wichtig:

- eine Wechselwirkung ist denkbar. Die Prüfung ergibt, daß die Wechselwirkungseffekte „nur" zufällig sind.

⇒

Die Varianztabelle - wie oben mit Papier und Bleistift, Excel oder SAS berechnet - bleibt unverändert. Bei den multiplen Mittelwertvergleichen kommen die Grenzdifferenzen (halbe Breite des Konfidenzintervalls) zum Test der Effekte der Hauptwirkungen, der Prüffaktoren A und B, zur Anwendung. Obiges SAS-Programm zum Vergleich der mittleren Wirkung der Stufen des Faktors A und/oder der des Faktors B kann uneingeschränkt für die verschiedenen Mittelwertprozeduren eingesetzt werden.

- eine Wechselwirkung ist aus fachlicher Sicht undenkbar.

⇒

Das Varianzanalysemodell muß verändert werden. Aus einem Modell mit Berücksichtigung der Wechselwirkung $\underline{y}_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ijk}$ muß ein Modell ohne Wechselwirkung werden: $\underline{y}_{ijk} = \mu + a_i + b_j + \underline{\varepsilon}_{ijk}$.

In SAS ist es einfach. Der Wechselwirkungsterm in der `model`-Anweisung wird weggelassen:

```
proc glm data= xxx;
  class faktor_a  faktor_b;
  model merkmal=faktor_a  faktor_b / ss3;
  means faktor_a / Mittelwertprozedur;
  means faktor_b / Mittelwertprozedur;
run;
```

Wurde die Varianztabelle mit Excel berechnet, dann wird das vollständige Modell einer zweifaktoriellen Varianzanalyse mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung zugrunde gelegt.
In solch einem Fall und auch wenn bei Papier und Bleistift das vollständige Modell gewählt wurde, muß die Varianztabelle dem fachlich relevanten Modell angepaßt werden.

Die Wechselwirkungskomponente SQ_{AxB} ist Null. Folglich ist $SQ_{Rest}^{(ohne\ AxB)} = SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B$. $SQ_{Rest}^{(ohne\ AxB)} = SQ_{Rest}$ wird also größer.
Auch die Freiheitsgrade des Restes im Varianzanalysemodell ohne Wechselwirkungen vergrößern sich um den Anteil der Wechselwirkungen aus dem bisherigen Modell:
$FG_{Rest}^{(ohne\ AxB)} = N - a * b + (a-1)(b-1) = N - a - b + 1$.

Im Varianzanalysemodell ohne Wechselwirkungen steht die Varianzursache Rest für diesen neuen Rest. Dementsprechend werden mit $MQ_{Rest} = \frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$ auch die Testgrößen $F_A = \frac{MQ_A}{MQ_{Rest}}$ und $F_B = \frac{MQ_B}{MQ_{Rest}}$ für das Varianzanalysemodell ohne Wechselwirkungen berechnet.

Mit der Restvarianz des zweifaktoriellen Varianzanalysemodells mit festen Effekten einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung und ohne Wechselwirkungen werden dann auch die Mittelwertprozeduren durchgeführt.

10.2 Varianzanalysemodell mit zufälligen Effekten

Die Stufen der beiden Faktoren A und B werden zufällig ausgewählt. Ein Vergleich der mittleren Wirkung einer Stufe mit einer anderen kann bei einer zufälligen Auswahl nicht das Interesse hervorrufen. Es geht um die Einschätzung der Variabilität, die die Prüffaktoren mit ihren zufällig ausgewählten Stufen im Gesamtmodell des Versuches verursachen. Dazu wird einmal das Varianzanalysemodell der vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung und zum anderen die zweifache hierarchische Klassifikation vorgestellt.

10.2.1 Vollständige Kreuzklassifikation mit Wiederholung

Für das Varianzanalysemodell einer zweifaktoriellen vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung (Modell II) gelten

- das lineare, additive Modell $\boxed{\underline{y}_{ijk} = \mu + \underline{a}_i + \underline{b}_j + (\underline{ab})_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ijk}}$ mit
  - μ: Erwartungswert der Grundgesamtheit des Versuches,
  - $\underline{a}_i$: Effekt der i-ten Stufe des Prüffaktors A
  - $\underline{b}_j$: Effekt der j-ten Stufe des Prüffaktors B
  - $(\underline{ab})_{ij}$: Wechselwirkungseffekt der i-ten Stufe des Prüffaktors A mit der j-ten Stufe des Prüffaktors B
- die Effekte $\underline{a}_i$, $\underline{b}_j$, $(\underline{ab})_{ij}$ und der Fehlerterm $\underline{\varepsilon}_{ijk}$ sind unabhängige Zufallsvariable
- der Erwartungswert der Fehlerkomponente ist Null: $E(\underline{\varepsilon}_{ijk}) = 0$
- die Varianzen der $\underline{\varepsilon}_{ijk}$ sind für alle i und j gleich: $VAR(\underline{\varepsilon}_{ijk}) = \sigma^2$
- die Zufallsvariablen $\underline{a}_i$, $\underline{b}_j$, $(\underline{ab})_{ij}$ und $\underline{\varepsilon}_{ijk}$ sind unabhängig und normalverteilt mit $N(0,\sigma_A^2)$, $N(0,\sigma_B^2)$, $N(0,\sigma_{AxB}^2)$ bzw. $N(0,\sigma^2)$
- und die Reparametrisierungsbedingungen $\sum_{i=1}^{a}\underline{a}_i = \sum_{j=1}^{b}\underline{b}_j = \sum_{i=1}^{a}(\underline{ab})_{ij} = \sum_{j=1}^{b}(\underline{ab})_{ij} = 0$.

10.2.1.1 Varianztabelle

Der Unterschied in der Varianztabelle für das Varianzanalysemodell mit festen Effekten (Modell I) einer zweifaktoriellen vollständigen Kreuzklassifikation mit (gleicher) Wiederholung und der mit zufälligen Effekten (Modell II) liegt in den Erwartungswerten für die mittlere quadratische Abweichung:

Varianzursache	Freiheitsgrade FG	Summe der Abweichungsquadrate SQ	mittlere quadratische Abweichung MQ	Testgröße F	erwartete mittlere quadratische Abweichung E(MQ)
gesamt	N - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2$			
zwischen den Stufen des Faktors A	a - 1	$bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2$	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\frac{MQ_A}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2+n\sigma_{AxB}^2+bn\sigma_B^2$
zwischen den Stufen des Faktors B	b - 1	$an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2$	$\frac{SQ_B}{FG_B}$	$\frac{MQ_B}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2+n\sigma_{AxB}^2+an\sigma_A^2$
Wechselwirkung AxB	(a-1)(b-1)	$n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2$	$\frac{SQ_{AxB}}{FG_{AxB}}$	$\frac{MQ_{AxB}}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2+n\sigma_{AxB}^2$
Rest	N - ab	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2$	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$		σ^2

$$N = \sum_{i,j} n_{ij} = a*b*n$$

10.2.1.2 Schätzen der Varianzkomponenten

Die zu testenden Hypothesen für das Varianzanalysemodell mit zufälligen Effekten (Modell II) einer zweifaktoriellen vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung sind:

über den Faktor A: $H_0: \sigma_A^2 = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_A: \sigma_A^2 > 0$

über den Faktor B: $H_0: \sigma_B^2 = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_A: \sigma_B^2 > 0$

über die Wechselwirkung AxB: $H_0: \sigma_{AxB}^2 = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_A: \sigma_{AxB}^2 > 0$

Die entsprechende Nullhypothese muß verworfen werden, wenn der F-Wert der Varianztabelle größer als das F-Quantil ist (bzw. wenn die Überschreitungswahrscheinlichkeit kleiner ist als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit):

$F_A > F_{1-\alpha;FG_A,FG_{Rest}} \rightarrow H_0: \sigma_A^2 = 0$ ablehnen!
$F_B > F_{1-\alpha;FG_B,FG_{Rest}} \rightarrow H_0: \sigma_B^2 = 0$ ablehnen!
$F_{AxB} > F_{1-\alpha;FG_{AxB},FG_{Rest}} \rightarrow H_0: \sigma_{AxB}^2 = 0$ ablehnen!

Die Varianzkomponenten werden gemäß der in der Varianztabelle (s. o.) aufgeführten Erwartungswerte geschätzt mit

$$\hat{\sigma}^2 = MQ_{Rest}$$

$$\hat{\sigma}_{AxB}^2 = \frac{MQ_{AxB} - MQ_{Rest}}{n}$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{MQ_B - MQ_{AxB}}{a\,n}$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{MQ_A - MQ_{AxB}}{b\,n}$$

Beachte: Es kann vorkommen, daß Schätzwerte für die Varianzkomponenten negativ werden. In einem solchen Fall wird diese Varianzkomponente Null gesetzt.

Beispiel 10.3

Das Beispiel 10.2 wird dahingehend abgeändert, daß sowohl die Betriebe (Faktor A) als auch die Sorten der Wintergerste (Faktor B) zufällig ausgewählt wurden. Es gilt folglich das Modell II der Varianzanalyse.

Der Varianztabelle kann entnommen werden, daß die Varianzkomponenten signifikant von Null verschieden sind, weil die F-Werte größer als die dazugehörigen F-Quantile sind bzw. die Überschreitungswahrscheinlichkeiten kleiner sind als die gewählte Irrtumswahrscheinlichkeit.

Die Schätzwerte sind:

$MQ_A =$ 250,17
$MQ_B =$ 1152,90
$MQ_{AxB} =$ 54,97
$MQ_{Rest} =$ 14,17 .

Mit a = 4, b = 6 und n = 3 ergeben sich die Schätzwerte für die Varianzkomponenten:

$$\hat{\sigma}^2 = MQ_{Rest} = 14{,}17$$

$$\hat{\sigma}^2_{AxB} = \frac{MQ_{AxB} - MQ_{Rest}}{n} = \frac{54{,}97 - 14{,}17}{3} = 13{,}6$$

$$\hat{\sigma}^2_{B} = \frac{MQ_{B} - MQ_{AxB}}{a\,n} = \frac{1152{,}90 - 54{,}97}{4*3} = 91{,}5$$

$$\hat{\sigma}^2_{A} = \frac{MQ_{A} - MQ_{AxB}}{b\,n} = \frac{250{,}17 - 54{,}97}{6*3} = 10{,}8$$

Das Verhältnis der Schätzwerte der Varianzkoeffizienten ist gerundet:

$s^2_{Rest} : s^2_A : s^2_B : s^2_{AxB} \approx 1 : 0{,}8 : 6{,}5 : 1$.

Die Variabilität zwischen den Sorten der Wintergerste (Faktor B) ist sehr groß. Sie beträgt mehr als das Sechsfache der anderen Varianzkomponenten.

Anders gesagt, da die Gesamtvarianz die Summe der Varianzkomponenten ist:

$s^2_{Gesamt} = s^2_A + s^2_B + s^2_{AxB} + s^2_{Rest} = 10{,}8 + 91{,}5 + 13{,}6 + 14{,}17 = 130{,}1 = 100\%$,

wird 70,3% der Varianz durch die Sorten der Wintergerste hervorgerufen!

SAS

```
proc varcomp data=bsp102  method=mivque0;
  class betrieb sorte;                       Faktor_A Faktor_B
  model ertrag=betrieb sorte betrieb*sorte;  Merkmal=Faktor_A Faktor_B Faktor_A*Faktor_B
run; quit;
```

Es gibt vier verschiedene Methoden der Varianzkomponentenschätzung:

`method = mivque0 | type1 | ml | reml` .

Standardseitig ist `method = mivque0` voreingestellt. Die Ergebnisse von `type1` entsprechen in der Regel der „normalen" Handrechnung, sie ist aber nicht optimal. Empfohlen werden aufgrund der guten Genauigkeitseigenschaften besonders bei nichtorthogonaler Klassifikation die Methoden `mivque0` oder `reml` .

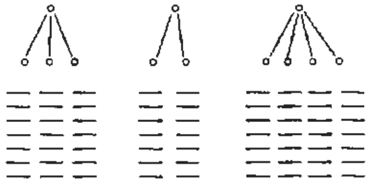
Das Output liefert keine Varianztabelle aber die bekannten Varianzkomponenten:

```
Variance Components Estimation Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
BETRIEB      4      1 2 3 4
SORTE        6      Sorte1 Sorte2 Sorte3 Sorte4 Sorte5 Sorte6

Number of observations in data set = 72

MIVQUE(0) Variance Component Estimation Procedure

SSQ Matrix

Source                BETRIEB         SORTE BETRIEB*SORTE        Error            ERTRAG

BETRIEB          972.00000000    0.00000000  162.00000000  54.00000000  13509.00000000
SORTE              0.00000000  720.00000000  180.00000000  60.00000000  69174.00000000
BETRIEB*SORTE    162.00000000  180.00000000  207.00000000  69.00000000  22018.50000000
Error             54.00000000   60.00000000   69.00000000  71.00000000   8019.50000000

                                Estimate
Variance Component                ERTRAG

Var(BETRIEB)                 10.84444444
Var(SORTE)                   91.49444444
Var(BETRIEB*SORTE)           13.60000000
Var(Error)                   14.16666667
```

Aufgabe 10.3: In einem Gewächshausversuch sollen die Düngung (unbehandelt, Stroh-, Stroh- und PO_4-, Stroh-, PO_4- und Kalkdüngung) und die chemische Behandlung (unbehandelt, N+O, CO_2-Gas, H_2CO_3) hinsichtlich des Ertrages einer Weizensorte dahingehend verglichen werden, daß die Stufen beider Faktoren zufällig ausgewählt wurden. Die Daten sind die der Aufgabe 10.2.

10.2.2 Die hierarchische Klassifikation

Hierarchische Strukturen treten vor allem bei Züchtungsversuchen und bei der Beobachtung von Nachkommen auf. Bei einer zweifachen hierarchischen Klassifikation trifft jeweils genau eine Stufe des einen Faktors mit einer Stufe des anderen Faktors zusammen. Es kann folgende Struktur verzeichnet werden:



Stufen des Faktors A

Stufen des Faktors B innerhalb der Stufen des Faktors A

Beobachtungen, Meßwerte

Nur bestimmte Stufen des Faktors B werden mit einer Stufe des Faktors A kombiniert. Die Faktoren sind nicht vertauschbar. Die Anzahl der Stufen des Faktors A ist a und die des Faktors B ist b_i innerhalb jeder A-Stufe (i = 1, 2, ..., a). Zu jeder Stufenkombination gibt es n_{ij} (i=1, 2, ..., a , j=1, 2, ..., b_i) Beobachtungen. Für das Varianzanalysemodell mit zufälligen Effekten (Modell II) einer zweifachen hierarchischen Klassifikation gelten

- das lineare, additive Modell $\boxed{\underline{y}_{ijk} = \mu + \underline{a}_i + \underline{b}_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ijk}}$ mit
  μ: Erwartungswert der Grundgesamtheit des Versuches,
  $\underline{a}_i$: Effekt der i-ten Stufe des Prüffaktors A
  $\underline{b}_{ij}$: Effekt der j-ten Stufe des Prüffaktors B innerhalb der i-ten Stufe des Prüffaktors A
- die Effekte $\underline{a}_i$, $\underline{b}_{ij}$ und der Fehlerterm $\underline{\varepsilon}_{ijk}$ sind unabhängige Zufallsvariable
- der Erwartungswert der Fehlerkomponente ist Null: $E(\underline{\varepsilon}_{ijk}) = 0$
- die Varianzen der $\underline{\varepsilon}_{ijk}$ sind für alle i und j gleich: $VAR(\underline{\varepsilon}_{ijk}) = \sigma^2$
- die Zufallsvariablen $\underline{a}_i$, $\underline{b}_j$ und $\underline{\varepsilon}_{ijk}$ sind unabhängig und normalverteilt mit $N(0,\sigma^2_A)$, $N(0,\sigma^2_B)$ bzw. $N(0,\sigma^2)$
- und die Reparametrisierungsbedingungen $\sum_{i=1}^{a} \underline{a}_i = 0$ und $\sum_{j=1}^{b_i} \underline{b}_{ij} = 0$ für alle i=1, 2,..., a .

Aufgrund der hierarchischen Struktur geht in den Effekt der j-ten Stufe des Faktors B der Wechselwirkungseffekt mit der i-ten Stufe des Faktors A untrennbar ein, so daß bei zwei Prüffaktoren folgende Hypothesen über die beiden Faktoren zu testen sind:

über den Faktor A: $H_0 : \sigma^2_A = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_A : \sigma^2_A > 0$

über den Faktor B innerhalb von A: $H_0 : \sigma^2_{B(A)} = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_A : \sigma^2_{B(A)} > 0$

Die entsprechende Nullhypothese ist abzulehnen, wenn der F-Wert der Varianztabelle größer als das F-Quantil ist (bzw. wenn die Überschreitungswahrscheinlichkeit kleiner ist als die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit):

$F_A > F_{1-\alpha;FG_A,FG_{Rest}} \rightarrow H_0 : \sigma^2_A = 0$ ablehnen!

$F_{B(A)} > F_{1-\alpha;FG_{B(A)},FG_{Rest}} \rightarrow H_0 : \sigma^2_{B(A)} = 0$ ablehnen!

Aus der Varianztabelle für eine zweifache hierarchische Klassifikation (Modell II)

Varianzursache	Freiheitsgrade FG	Summe der Abweichungsquadrate SQ	mittlere quadratische Abweichung MQ	Testgröße F	erwartete mittlere quadratische Abweichung E(MQ)
gesamt	N - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$			
zwischen den Stufen des Faktors A	a - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\frac{MQ_A}{MQ_{B(A)}}$	$\sigma^2+k_2\,\sigma^2_{B(A)}+k_3\,\sigma^2_A$
zwischen den Stufen des Faktors B innerhalb von A	$\sum_{i=1}^{a}b_i-a$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij\bullet}-\bar{y}_{i\bullet\bullet})^2$	$\frac{SQ_{B(A)}}{FG_{B(A)}}$	$\frac{MQ_{B(A)}}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2+k_1\,\sigma^2_{B(A)}$
Rest	$N-\sum_{i=1}^{a}b_i$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\bullet})^2$	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$		σ^2

mit

	allgemein	$b_i = b$; $n_{ij} = n$ für alle i = 1, 2, ..., a; j = 1, 2, ..., b
N =	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}$	$a*b*n$
$k_1 =$	$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{a}b_i\right)-a}\left(N-\sum_{i=1}^{a}\frac{\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^2}{\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}}\right)$	n
$k_2 =$	$\frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^2\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}}-\frac{1}{N}\right)$	n
$k_3 =$	$\frac{1}{a-1}\left(N-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}\right)^2\right)$	$b*n$

können die Varianzkomponenten geschätzt werden:

	allgemein	$b_i = b$; $n_{ij} = n$ für alle i = 1, 2, ..., a; j = 1, 2, ..., b
$\hat{\sigma}^2 = s^2_{Rest} =$	MQ_{Rest}	MQ_{Rest}
$\hat{\sigma}^2_{B(A)} = s^2_{B(A)} =$	$\frac{MQ_{B(A)}-MQ_{Rest}}{k_1}$	$\frac{MQ_{B(A)}-MQ_{Rest}}{n}$
$\hat{\sigma}^2_A = s^2_A =$	$\frac{1}{k_3}\left[MQ_A-\frac{k_2}{k_1}MQ_{B(A)}-\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)MQ_{Rest}\right]$	$\frac{MQ_A-MQ_{B(A)}}{b*n}$

Beispiel 10.4

An drei zufällig bestimmten Blättern von je 4 zufällig ausgewählten Zuckerrüben wurde die prozentuale Konzentration von Kalzium in zweifacher Wiederholung gemessen.[29]

Rübe	Blatt	Kalziumkonzentration	
1	1	3,28	3,09
	2	3,52	3,48
	3	2,88	2,80
2	1	2,46	2,44
	2	1,87	1,92
	3	2,19	2,19
3	1	2,77	2,66
	2	3,74	3,44
	3	2,55	2,55
4	1	3,78	3,87
	2	4,07	4,12
	3	3,31	3,31

Sind die Varianzkomponenten bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α=0,05 von Null verschieden?

Faktor A:	Rüben ,	$a = 4$
Faktor B(A):	Blätter der Rüben ,	$b = 3$
Wiederholung		$n = 2$
Gesamtumfang		$N = a*b*n = 24$

Zunächst wird die Varianztabelle aufgestellt. Dazu werden einige Summen gebildet.

Rübe	Blatt	Kalziumkonzentration		Summe
1	1	3,28	3,09	
	2	3,52	3,48	
	3	2,88	2,80	19,05
2	1	2,46	2,44	
	2	1,87	1,92	
	3	2,19	2,19	13,07
3	1	2,77	2,66	
	2	3,74	3,44	
	3	2,55	2,55	17,71
4	1	3,78	3,87	
	2	4,07	4,12	
	3	3,31	3,31	22,46
				72,29

Es gilt $b_i = b = 3$ und $n_{ij} = n = 2$ für alle $i = 1, 2, ..., a$, $j = 1, 2, ..., b$.

$$Sgl = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 \qquad = 72{,}29^2/24 = 217{,}74$$

$$SQ_{gesamt} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - Sgl \qquad = (3{,}28^2+3{,}09^2+3{,}52^2+ \dots + 3{,}31^2) - 217{,}74 \qquad = 10{,}27$$

[29] AHRENS, H.: Varianzanalyse, Berlin, 1967, Beispiel S. 124 f

$$SQ_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 - Sgl \quad = (19{,}05^2+13{,}07^2+17{,}71^2+22{,}46^2)\,/\,(3*2) - 217{,}74 \quad = \quad 7{,}56$$

$$SQ_{B(A)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}\right)^2 = [(3{,}28+3{,}09)^2+(3{,}52+3{,}48)^2+\ldots+(3{,}31+3{,}31)^2]/2$$

$$- (19{,}05^2+13{,}07^2+17{,}71^2+22{,}46^2)\,/\,(3*2) \quad = \quad 2{,}63$$

$$SQ_{Rest} = SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_{B(A)} \quad = 10{,}27 - 7{,}56 - 2{,}63 \quad = \quad 0{,}08$$

$FG_{gesamt} = N - 1 \quad = 24 - 1 \quad = 23$

$FG_A \quad = a - 1 \quad = 4 - 1 \quad = 3$

$FG_{B(A)} \quad = a * b - a \quad = 4 * 3 - 3 = 8$

$FG_{Rest} \quad = N - a * b \quad = 24 - 4 * 3 = 12$

$$MQ_{gesamt} = s^2 = \frac{SQ_{gesamt}}{FG_{gesamt}} \quad = 10{,}27 / 23 \quad = 0{,}45$$

$$MQ_A = s_A^2 = \frac{SQ_A}{FG_A} \quad = 7{,}56 / 3 \quad = 2{,}52$$

$$MQ_{B(A)} = s_{B(A)}^2 = \frac{SQ_{B(A)}}{FG_{B(A)}} \quad = 2{,}63 / 8 \quad = 0{,}33$$

$$MQ_{Rest} = s_{Rest}^2 = \frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}} \quad = 0{,}08 / 12 \quad = 0{,}007$$

$$F_A = \frac{MQ_A}{MQ_{B(A)}} \quad = 2{,}52 / 0{,}33 \quad = 7{,}64$$

$$F_{B(A)} = \frac{MQ_{B(A)}}{MQ_{Rest}} \quad = 0{,}33 / 0{,}007 \quad = 47{,}14$$

$k_1 = n = 2$

$k_2 = n = 2$

$k_3 = b * n = 3 * 2 = 6$

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;FG_1,FG_2}$	Test	$\widehat{E(MQ)}$
Gesamt	23	10,27					
Faktor A (Rüben)	3	7,56	2,52	7,64	4,066	signifikant	0,007+2*0,33+6*2,52
Faktor B(A) (Blätter)	8	2,63	0,33	47,14	2,849	signifikant	0,007+2*0,33
Rest	12	0,08	0,007				0,007

Die Schätzwerte für die signifikant von Null verschiedenen Varianzkomponenten sind:

$\hat{\sigma}^2 = s_{Rest}^2 = \quad 0{,}007$

$\hat{\sigma}_{B(A)}^2 = s_{B(A)}^2 = \quad (0{,}33 - 0{,}007) / 2 = \quad 0{,}16$

$\hat{\sigma}_A^2 = s_A^2 = \quad (2{,}52 - 0{,}33) / (3 * 2) = \quad 0{,}37$.

Die Variabilität der Rüben ist mehr als doppelt so groß wie die der Blätter.

SAS

```
data bsp104;
  input ruebe blatt kalzium  @@;
cards;
1     1      3.28          2     2      1.87          3     3      2.55
1     1      3.09          2     2      1.92          3     3      2.55
1     2      3.52          2     3      2.19          4     1      3.78
1     2      3.48          2     3      2.19          4     1      3.87
1     3      2.88          3     1      2.77          4     2      4.07
1     3      2.80          3     1      2.66          4     2      4.12
2     1      2.46          3     2      3.74          4     3      3.31
2     1      2.44          3     2      3.44          4     3      3.31
;
proc varcomp data=bsp104
             method=reml;
  class ruebe blatt;                         Faktor_A  Faktor_B
  model kalzium=ruebe blatt(ruebe);          Faktor_A  Faktor_B innerhalb von Faktor_A
run; quit;
```

SAS-Output

```
Variance Components Estimation Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
RUEBE          4    1 2 3 4
BLATT          3    1 2 3

Number of observations in data set = 24

MIVQUE(0) Variance Component Estimation Procedure

SSQ Matrix

Source                 RUEBE  BLATT(RUEBE)          Error        KALZIUM

RUEBE           108.00000000   36.00000000    18.00000000    45.36207500
BLATT(RUEBE)     36.00000000   44.00000000    22.00000000    20.38109167
Error            18.00000000   22.00000000    23.00000000    10.27039583

                                  Estimate
Variance Component                 KALZIUM

Var(RUEBE)                      0.36522338
Var(BLATT(RUEBE))               0.16106042
Var(Error)                      0.00665417
```

Aufgabe 10.4: Bei der Mastleistungsprüfung (1952) mit zwei zufällig ausgewählten Ebern wird die Anzahl der Masttage der Nachkommen der Paarungen mit jeweils drei zufällig ausgewählten Sauen ermittelt.[30] Die Varianzkomponenten sind zu berechnen. Es ist zu testen, ob sie sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ signifikant von Null unterscheiden.

Eber	A_1			A_2		
Sauen	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{21}	B_{22}	B_{23}
Masttage	93	107	109	89	87	81
	89	99	107	102	91	83
	97		94	104	82	85
	105		106	97		91

[30] RASCH, D., G. ENDERLEIN und G. HERRENDÖRFER: Biometrie. Verfahren, Tabellen, angewandte Statistik VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1973, Beispiel 7.7 S. 158 f

10.3 Varianzanalysemodell mit festen und zufälligen Effekten

Ein Varianzanalysemodell mit festen und zufälligen Effekten wird mitunter auch als Modell III der Varianzanalyse bezeichnet.

10.3.1 Vollständige Kreuzklassifikation mit Wiederholung

Betrachtet werden die Varianzanalysemodelle einer zweifaktoriellen vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung

$$\boxed{\underline{y}_{ijk} = \mu + a_i + \underline{b}_j + (\underline{ab})_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ijk}} \quad ,$$

in denen jeweils die Stufen des Faktors A fest, die des Faktors B und die Wechselwirkung zufällig sind. Die Hypothesen lauten entsprechend des Modellansatzes:

$H_0^A : a_i = 0$ $i = 1, 2, ..., a$	gegen die Alternativhypothese	$H_A^A : a_i \neq 0$ für mindestens ein i ($i = 1, 2, ..., a$)
$H_0^B : \sigma_B^2 = 0$	gegen die Alternativhypothese	$H_A^B : \sigma_B^2 > 0$
$H_0^{AxB} : \sigma_{AxB}^2 = 0$	gegen die Alternativhypothese	$H_A^{AxB} : \sigma_{AxB}^2 > 0$

Von dem Faktor mit den festen Stufen (Faktor A) werden die mittleren Effekte verglichen. Für den Faktor mit den zufälligen Stufen (Faktor B) und die Wechselwirkung werden die Varianzkomponenten getestet.

Die Varianztabelle hat folgendes Aussehen:

Varianz-ursache	FG	SQ	MQ	F	E(MQ)
gesamt	N - 1				
zwischen den Stufen des Faktors A	a - 1	SQ_A	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\frac{MQ_A}{MQ_{AxB}}$	$\sigma^2 + n\sigma_{AxB}^2 + \frac{bn}{a-1}\sum_{i=1}^{a} a_i^2$
zwischen den Stufen des Faktors B	b - 1	SQ_B	$\frac{SQ_B}{FG_B}$	$\frac{MQ_B}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2 + an\,\sigma_B^2$
Wechsel-wirkung AxB	(a-1)(b-1)	SQ_{AxB}	$\frac{SQ_{AxB}}{FG_{AxB}}$	$\frac{MQ_{AxB}}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2 + n\,\sigma_{AxB}^2$
Rest	N - ab	SQ_{Rest}	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$		σ^2

$$N = \sum_{i,j} n_{ij} = a*b*n$$

Der Vergleich der mittleren Wirkung der Stufen des Faktors, dessen Stufen fest sind, wird anhand obigen F-Tests vorgenommen. Es wird geprüft, ob es zwischen den Stufen hinsichtlich ihrer mittleren Wirkung signifikante Unterschiede gibt.
Die Varianzkomponenten werden mit den entsprechenden, in obiger Varianztabelle aufgeführten F-Tests getestet, ob sie sich signifikant von Null unterscheiden. Sie werden geschätzt mit

$$\hat{\sigma}^2 = s_{Rest}^2 = MQ_{Rest}$$
$$\hat{\sigma}_B^2 = s_B^2 = (MQ_B - MQ_{AxB}) / a\,n$$
$$\hat{\sigma}_{AxB}^2 = s_{AxB}^2 = (MQ_{AxB} - MQ_{Rest}) / n$$

Multiple Mittelwertvergleiche können natürlich nur für die mittleren Wirkung der Stufen des Faktors vorgenommen werden, dessen Stufen fest sind. Die Berechnung der Grenzdifferenzen im gemischten Modell ist in der Tabelle 10.3 aufgeführt.

Tabelle 10.3: Übersicht über die Berechnung der Grenzdifferenzen für das gemischte Modell einer zweifaktoriellen vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung

multiple Vergleichsprozedur	Vergleich der Mittelwerte der Stufen des Faktors A (B zufällig)
multipler t-Test	$LSD_{\alpha} = t_{1-\alpha/2;FG_{AxB}} * s_{AxB} \sqrt{\frac{2}{b\,n}}$
Bonferroni-Fisher-Prozedur	$FSD_{\alpha;m} = t_{1-\alpha/(2*m);FG_{AxB}} * s_{AxB} \sqrt{\frac{2}{b\,n}}$ mit $m = a(a-1)/2$
Tukey-Prozedur	$HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;a,FG_{AxB}} * s_{AxB} / \sqrt{b\,n}$
Dunnett-Prozedur, zweiseitig	$DSD_{\alpha;a-1} = \lvert d \rvert_{1-\alpha/2;a-1,FG_{AxB}} * s_{AxB} \sqrt{\frac{2}{b\,n}}$
Dunnett-Prozedur, einseitig	$DSD_{\alpha;a-1} = \lvert d \rvert_{1-\alpha;a-1,FG_{AxB}} * s_{AxB} \sqrt{\frac{2}{b\,n}}$

Beispiel 10.5

Ausgehend von Beispiel 10.2:
In vier landwirtschaftlichen Betrieben wurden sechs Sorten Wintergerste auf jeweils drei Schlägen angebaut[31].

Betrieb	Schlag	Sorte1	Sorte2	Sorte3	Sorte4	Sorte5	Sorte6
1	1	32	48	25	38	34	29
	2	28	52	25	38	27	27
	3	30	47	34	44	38	31
2	1	44	55	28	39	21	31
	2	43	53	26	38	30	33
	3	48	57	33	37	36	26
3	1	42	64	40	53	38	37
	2	42	64	42	41	29	33
	3	39	64	47	47	23	32
4	1	44	59	34	54	33	31
	2	40	58	27	50	36	30
	3	42	57	32	46	36	35

soll davon ausgegangen werden, daß die Betriebe zufällig ausgewählt wurden. Es soll geprüft werden, ob hinsichtlich der mittleren Erträge (in kg/ha) bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α=0.05 Unterschiede zwischen den Sorten bestehen und ob sich die Varianzkomponenten der Sorten und der Wechselwirkung signifikant von Null unterscheiden.

Das bedeutet:

Faktor A (Betriebe) : zufällig
Faktor B (Sorten) : fest

Obige allgemeine Modellbetrachtungen beziehen sich auf das Modell $\underline{y}_{ijk} = \mu + a_i + \underline{b}_j + (\underline{ab})_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ijk}$.
Durch Umbenennen läßt sich auch das Modell $\underline{y}_{ijk} = \mu + \underline{a}_i + b_j + (\underline{ab})_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ijk}$ lösen.

[31] Beispiel 8.5 aus:
RASCH, D.: Biometrie. Einführung in die Biostatistik
VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1983, S. 173 f

Die Freiheitsgrade (FG), die Summen der Abweichungsquadrate (SQ) und die mittleren quadratischen Abweichungen (MQ) werden genauso wie im Beispiel 10.2 (Kapitel 10.1.2.1) gemäß Varianzanalysemodell I berechnet. Bei der Berechnung der F-Werte kommt das gemischte Modell zum Tragen (s. o.).

Mit

$$F_A = \frac{MQ_A}{MQ_{Rest}} = 250{,}17 / 14{,}17 = 17{,}65$$

$$F_B = \frac{MQ_B}{MQ_{AxB}} = 1152{,}90 / 54{,}97 = 20{,}97 \quad [\leftarrow \text{gegenüber Modell I verändert!}]$$

$$F_{AxB} = \frac{MQ_{AxB}}{MQ_{Rest}} = 54{,}97 / 14{,}17 = 3{,}88$$

und den F-Quantilen: $F_{1-\alpha;3,48} = 2{,}798$, $F_{1-\alpha;5,15} = 2{,}901$ und $F_{1-\alpha;15,48} = 1{,}880$ (Tab. 8.4 b oder SAS-Funktion `finv(0.95,FG₁,FG₂)`) hat die Varianztabelle für das gemischte Modell folgendes Aussehen:

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;FG_1,FG_2}$	Test
Gesamt	71	8019,5				
Faktor A (Betriebe)	3	750,5	250,17	17,65	2,798	signifikant
Faktor B (Sorten)	5	5764,5	1152,90	20,97	2,409	signifikant
Wechselwirkung A x B	15	854,5	54,97	3,88	1,880	signifikant
Rest	48	680,0	14,17			

Hinsichtlich des mittleren Ertrages gibt es signifikante Unterschiede zwischen den Sorten. Die Varianzkomponenten der Betriebe und die der Wechselwirkung sind signifikant von Null verschieden. Die Schätzwerte für die Varianzkomponenten sind:

$$s^2_{Rest} = MQ_{Rest} = 14{,}17$$

$$s^2_A = (MQ_A - MQ_{AxB}) / b\,n = (250{,}17 - 54{,}97) / (6 * 3) = 10{,}84$$

$$s^2_{AxB} = (MQ_{AxB} - MQ_{Rest}) / n = (54{,}97 - 14{,}17) / 3 = 13{,}60$$

Die Varianzkomponenten der Betriebe und die der Wechselwirkung sind etwa gleich groß.

Beim Vergleich der mittleren Wirkung der Sorten auf den Ertrag ist keine der Sorten als Standard oder Kontrolle hervorgehoben, so daß die Tukey-Prozedur für den multiplen Vergleich der Mittelwerte gewählt wird.

Es werden die Sortenmittelwerte[32] verglichen und nicht die Betrieb-Sorten-Mittelwerte auf gleicher Sortenstufe:

Sorte	Sorte1	Sorte2	Sorte3	Sorte4	Sorte5	Sorte6
Mittelwert	39,50	56,50	32,75	43,75	31,75	31,25

[32] SAS-Programm:

```
proc sort data=bsp102;
  by sorte;
proc means noprint;
  var ertrag;
  output out=sm mean=mean;
  by sorte;
proc print data=sm noobs;
  var sorte mean;
run;
```

Die Grenzdifferenz ist mit $q_{1-\alpha;6,15} = 4{,}595$ (Tab. 8.6)

$HSD_{\alpha;b} = q_{1-\alpha;b,FG_{AxB}} * s_{AxB} / \sqrt{a\,n} = 4{,}595 * \sqrt{54{,}97} / \sqrt{4*3} = 9{,}83$.

$\bar{y}_{i\bullet}$		$\bar{y}_{i'\bullet}$		$\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}$	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
Sorte1	39,50	Sorte2	56,50	-17,00	-26,83	-7,17	signifikant
		Sorte3	32,75	6,75	-3,08	16,58	nicht signifikant
		Sorte4	43,75	-4,25	-14,08	5,58	nicht signifikant
		Sorte5	31,75	7,75	-2,08	17,58	nicht signifikant
		Sorte6	31,25	8,25	-1,58	18,08	nicht signifikant
Sorte2	56,50	Sorte3	32,75	23,75	13,92	33,58	signifikant
		Sorte4	43,75	12,75	2,92	22,58	signifikant
		Sorte5	31,75	24,75	14,92	34,58	signifikant
		Sorte6	31,25	25,25	15,42	35,08	signifikant
Sorte3	32,75	Sorte4	43,75	-11,00	-20,83	-1,17	signifikant
		Sorte5	31,75	1,00	-8,83	10,83	nicht signifikant
		Sorte6	31,25	1,50	-8,33	11,33	nicht signifikant
Sorte4	43,75	Sorte5	31,75	12,00	2,17	21,83	signifikant
		Sorte6	31,25	12,50	2,67	22,33	signifikant
Sorte5	31,75	Sorte6	31,25	0,50	-9,33	10,33	nicht signifikant

Signifikanz liegt dann vor, wenn das Konfidenzintervall die Null nicht einschließt.

SAS

Ein gemischtes Modell kann prinzipiell mit Hilfe der Prozeduren `glm` , `mixed` und `varcomp` realisiert werden. Allerdings hat jede Prozedur ihre „Eigenheiten" und auch Probleme.

PROC GLM

```
proc glm data=bsp102;
  class betrieb sorte;
  model ertrag= betrieb sorte betrieb*sorte / ss3;
  random betrieb betrieb*sorte;          die zufälligen Effekte müssen separat benannt werden
  test H=sorte E=betrieb*sorte;          der Faktor A wird gegen die Wechselwirkung getestet (s. o.)
                                         H= Zählervarianz , E= Nennervarianz
  means sorte / E=betrieb*sorte tukey cldiff nosort;
                                         der Vergleich der Sortenmittelwerte erfolgt bezüglich der
                                         Wechselwirkung (E= AxB), nicht des Restes
run; quit;
```

Das um die doppelten Vergleiche gekürzte SAS-Output ist:

```
General Linear Models Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
BETRIEB        4    1 2 3 4
SORTE          6    Sorte1 Sorte2 Sorte3 Sorte4 Sorte5 Sorte6

Number of observations in data set = 72
```

```
General Linear Models Procedure

Dependent Variable: ERTRAG
```

die Varianztabelle ist die des Modells I

```
Source            DF       Sum of Squares        Mean Square   F Value     Pr > F
Model             23        7339.50000000       319.10869565     22.53     0.0001
Error             48         680.00000000        14.16666667
Corrected Total   71        8019.50000000

             R-Square                C.V.           Root MSE          ERTRAG Mean
             0.915207            9.589461         3.76386326          39.25000000

Source            DF          Type III SS        Mean Square   F Value     Pr > F
BETRIEB            3         750.50000000       250.16666667     17.66     0.0001
SORTE              5        5764.50000000      1152.90000000     81.38     0.0001
BETRIEB*SORTE     15         824.50000000        54.96666667      3.88     0.0002
```

Koeffizienten für die Varianzkomponenten (Modell II)

```
General Linear Models Procedure

Source          Type III Expected Mean Square
BETRIEB         Var(Error) + 3 Var(BETRIEB*SORTE) + 18 Var(BETRIEB)
SORTE           Var(Error) + 3 Var(BETRIEB*SORTE) + Q(SORTE)
BETRIEB*SORTE   Var(Error) + 3 Var(BETRIEB*SORTE)
```

Tukey-Prozedur

```
General Linear Models Procedure
Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: ERTRAG

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 15  MSE= 54.96667
Critical Value of Studentized Range= 4.595
Minimum Significant Difference= 9.8337

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                      Simultaneous                Simultaneous
                          Lower     Difference       Upper
      SORTE            Confidence     Between     Confidence
    Comparison            Limit        Means         Limit

Sorte1 - Sorte2         -26.834      -17.000        -7.166   ***
Sorte1 - Sorte3          -3.084        6.750        16.584
Sorte1 - Sorte4         -14.084       -4.250         5.584
Sorte1 - Sorte5          -2.084        7.750        17.584
Sorte1 - Sorte6          -1.584        8.250        18.084

Sorte2 - Sorte3          13.916       23.750        33.584   ***
Sorte2 - Sorte4           2.916       12.750        22.584   ***
Sorte2 - Sorte5          14.916       24.750        34.584   ***
Sorte2 - Sorte6          15.416       25.250        35.084   ***

Sorte3 - Sorte4         -20.834      -11.000        -1.166   ***
Sorte3 - Sorte5          -8.834        1.000        10.834
Sorte3 - Sorte6          -8.334        1.500        11.334

Sorte4 - Sorte5           2.166       12.000        21.834   ***
Sorte4 - Sorte6           2.666       12.500        22.334   ***

Sorte5 - Sorte6          -9.334        0.500        10.334
```

veränderte Zeile der Varianztabelle für das gemischte Modell

```
General Linear Models Procedure
Dependent Variable: ERTRAG

Tests of Hypotheses using the Type III MS for BETRIEB*SORTE as an error term

Source   DF      Type III SS       Mean Square    F Value     Pr > F
SORTE     5    5764.50000000     1152.90000000      20.97     0.0001
```

Die Programmzeile

```
test H=sorte E=betrieb*sorte
```

bewirkt nachträglich die Korrektur der Varianztabelle entsprechend des gewählten gemischten Modells.

Die Varianzkomponenten sind noch zu schätzen - s. Handrechnung.

PROC MIXED

```
proc mixed data=bsp102;
  class betrieb sorte;
  model ertrag= sorte;
  random betrieb betrieb*sorte;
  lsmeans sorte / adjust=tukey;
run; quit;
```

in der Modell-Anweisung stehen nur die festen Effekte
in der random-Anweisung stehen nur die zufälligen Effekte

In proc mixed wird die Tukey-Prozedur für die Sorten-Mittelwerte realisiert mit der Befehlszeile

```
  lsmeans sorte / adjust=tukey;
```

SAS-Output:

```
                         The MIXED Procedure
                       Class Level Information

              Class      Levels  Values
              BETRIEB         4  1 2 3 4
              SORTE           6  Sorte1 Sorte2 Sorte3 Sorte4
                                 Sorte5 Sorte6

                    REML Estimation Iteration History

             Iteration  Evaluations      Objective      Criterion
                     0            1  313.97197355
                     1            1  284.81953189     0.00000000
Convergence criteria met.

                   Covariance Parameter Estimates (REML)
       Cov Parm               Ratio      Estimate     Std Error        Z   Pr > |Z|

       BETRIEB           0.76549020   10.84444444   11.40244252     0.95     0.3416
       BETRIEB*SORTE     0.96000000   13.60000000    6.75941205     2.01     0.0442
       Residual          1.00000000   14.16666667    2.89175872     4.90     0.0001
```

diese Überschreitungswahrscheinlichkeiten entsprechen nicht denen des F-Testes - sie sollten nicht herangezogen werden.

```
                 Model Fitting Information for ERTRAG
               Description                            Value
               Observations                         72.0000
               Variance Estimate                    14.1667
               Standard Deviation Estimate           3.7639
               REML Log Likelihood                 -203.060
               Akaike's Information Criterion      -206.060
               Schwarz's Bayesian Criterion        -209.344
               -2 REML Log Likelihood               406.1194
```

dem gemischten Modell entsprechende Zeile der Varianztabelle

```
                        Tests of Fixed Effects
               Source        NDF    DDF   Type III F   Pr > F
               SORTE           5     15        20.97   0.0001

                          Least Squares Means
        Level                      LSMEAN      Std Error     DDF        T   Pr > |T|
        SORTE Sorte1          39.50000000     2.70030862      15    14.63     0.0001
        SORTE Sorte2          56.50000000     2.70030862      15    20.92     0.0001
        SORTE Sorte3          32.75000000     2.70030862      15    12.13     0.0001
        SORTE Sorte4          43.75000000     2.70030862      15    16.20     0.0001
        SORTE Sorte5          31.75000000     2.70030862      15    11.76     0.0001
        SORTE Sorte6          31.25000000     2.70030862      15    11.57     0.0001

                         Differences of Least Squares Means
Level 1       Level 2         Difference   Std Error DDF     T Pr > |T| Adjustment    Adj P

SORTE Sorte1 SORTE Sorte2 -17.00000000  3.02673275  15 -5.62   0.0001 Tukey-Kramer 0.0006
SORTE Sorte1 SORTE Sorte3   6.75000000  3.02673275  15  2.23   0.0414 Tukey-Kramer 0.2806
SORTE Sorte1 SORTE Sorte4  -4.25000000  3.02673275  15 -1.40   0.1806 Tukey-Kramer 0.7243
SORTE Sorte1 SORTE Sorte5   7.75000000  3.02673275  15  2.56   0.0217 Tukey-Kramer 0.1678
SORTE Sorte1 SORTE Sorte6   8.25000000  3.02673275  15  2.73   0.0156 Tukey-Kramer 0.1272
SORTE Sorte2 SORTE Sorte3  23.75000000  3.02673275  15  7.85   0.0001 Tukey-Kramer 0.0000
SORTE Sorte2 SORTE Sorte4  12.75000000  3.02673275  15  4.21   0.0008 Tukey-Kramer 0.0080
SORTE Sorte2 SORTE Sorte5  24.75000000  3.02673275  15  8.18   0.0001 Tukey-Kramer 0.0000
SORTE Sorte2 SORTE Sorte6  25.25000000  3.02673275  15  8.34   0.0001 Tukey-Kramer 0.0000
```

```
SORTE Sorte3 SORTE Sorte4 -11.00000000  3.02673275  15 -3.63  0.0024 Tukey-Kramer 0.0243
SORTE Sorte3 SORTE Sorte5   1.00000000  3.02673275  15  0.33  0.7457 Tukey-Kramer 0.9994
SORTE Sorte3 SORTE Sorte6   1.50000000  3.02673275  15  0.50  0.6274 Tukey-Kramer 0.9956
SORTE Sorte4 SORTE Sorte5  12.00000000  3.02673275  15  3.96  0.0012 Tukey-Kramer 0.0129
SORTE Sorte4 SORTE Sorte6  12.50000000  3.02673275  15  4.13  0.0009 Tukey-Kramer 0.0094
SORTE Sorte5 SORTE Sorte6   0.50000000  3.02673275  15  0.17  0.8710 Tukey-Kramer 1.0000
```

Die in der letzten Spalte ausgegebenen Überschreitungswahrscheinlichkeiten führen zur gleichen Testaussage wie die obige Handrechnung.

PROC VARCOMP

Mit `proc varcomp` können nur die Varianzkomponenten modellgerecht berechnet, aber keine multiplen Mittelwertvergleiche durchgeführt werden.

```
proc varcomp data=bsp102 method=mivque0;
  class betrieb sorte;
  model ertrag= sorte betrieb betrieb*sorte
             / fixed=1;
```
die ersten n=1 in der Modell-Anweisung aufgeführten Effekte sind fest, alle anderen zufällig
```
run; quit;
```

SAS-Output

```
Variance Components Estimation Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
BETRIEB        4    1 2 3 4
SORTE          6    Sorte1 Sorte2 Sorte3 Sorte4 Sorte5 Sorte6

Number of observations in data set = 72

MIVQUE(0) Variance Component Estimation Procedure

SSQ Matrix

Source               BETRIEB   BETRIEB*SORTE         Error          ERTRAG
BETRIEB         972.00000000    162.00000000   54.00000000  13509.00000000
BETRIEB*SORTE   162.00000000    162.00000000   54.00000000   4725.00000000
Error            54.00000000     54.00000000   66.00000000   2255.00000000

                                 Estimate
Variance Component                 ERTRAG
Var(BETRIEB)                  10.84444444
Var(BETRIEB*SORTE)            13.60000000
Var(Error)                    14.16666667
```

10.3.2 Hierarchische Klassifikation

Für eine zweifaktorielle hierarchische Klassifikation mit festen (Faktor A) und zufälligen Effekten (Faktor B innerhalb von Faktor A) wird das Varianzanalysemodell $\boxed{\underline{y}_{ijk} = \mu + a_i + \underline{b}_{ij} + \underline{\varepsilon}_{ijk}}$ betrachtet. Die Hypothesen lauten:

$H_0^A : a_i = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_A^A : a_i \neq 0$
$i = 1, 2, ..., a$ — für mindestens ein i (i = 1, 2, ..., a)

$H_0^{B(A)} : \sigma^2_{B(A)} = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_A^{B(A)} : \sigma^2_{B(A)} > 0$

Für den Faktor A kann die mittlere Wirkung der (festen) Stufen verglichen werden. Die Varianzkomponente des Faktors B einschließlich der Wechselwirkung wird geprüft, ob sie von Null signifikant verschieden ist. Die Varianztabelle hat unter der Annahme, daß $b_i = b$ und $n_{ij} = n$ folgendes Aussehen:

Varianzursache	Freiheitsgrade FG	Summe der Abweichungsquadrate SQ	mittlere quadratische Abweichung MQ	Testgröße F	erwartete mittlere quadratische Abweichung E(MQ)
gesamt	N - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{\dots})^2$			
zwischen den Stufen des Faktors A	a - 1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i\dots}-\bar{y}_{\dots})^2$	$\frac{SQ_A}{FG_A}$	$\frac{MQ_A}{MQ_{B(A)}}$	$\sigma^2+n\,s^2_{B(A)}+\frac{b\,n}{a-1}\sum_{i=1}^{a}a_i$
zwischen den Stufen des Faktors B innerhalb von A	a b - a	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij\bullet}-\bar{y}_{i\dots})^2$	$\frac{SQ_{B(A)}}{FG_{B(A)}}$	$\frac{MQ_{B(A)}}{MQ_{Rest}}$	$\sigma^2+n\,\sigma^2_{B(A)}$
Rest	N - a b	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ijk}-\bar{y}_{ij\bullet})^2$	$\frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}}$		σ^2

$N = a * b * n$

Folglich können die Varianzkomponenten geschätzt werden durch:

$\hat{\sigma}^2 = s^2_{Rest} = MQ_{Rest}$

$\hat{\sigma}^2_{B(A)} = s^2_{B(A)} = (MQ_{B(A)} - MQ_{Rest}) / n$

Der jeweilige F-Test gibt Antwort auf die Fragen, ob

- die mittlere Wirkung aller Stufen des Faktors A gleich ist, oder sich mindestens eine Stufe von den anderen signifikant unterscheidet,
- die Varianzkomponente des Faktors B innerhalb der Stufen von A Null oder signifikant von Null verschieden ist.

Die Berechnung der Grenzdifferenzen für multiple Mittelwertvergleiche der Stufen des Faktors A im gemischten Modell ist in der Tabelle 10.4 aufgeführt.

Tabelle 10.4: Übersicht über die Berechnung der Grenzdifferenzen für das gemischte Modell einer zweifaktoriellen hierarchischen Klassifikation

multiple Vergleichsprozedur	Vergleich der Mittelwerte der Stufen des Faktors A
multipler t-Test	$LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2;FG_{B(A)}} * s_{B(A)}\sqrt{\frac{2}{b\,n}}$
Bonferroni-Fisher-Prozedur	$FSD_{\alpha;m} = t_{1-\alpha/(2*m);FG_{B(A)}} * s_{B(A)}\sqrt{\frac{2}{b\,n}}$ mit $m = a(a-1)/2$
Tukey-Prozedur	$HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;a,FG_{B(A)}} * s_{B(A)} / \sqrt{b\,n}$
Dunnett-Prozedur, zweiseitig	$DSD_{\alpha;a-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha/2;a-1,FG_{B(A)}} * s_{B(A)}\sqrt{\frac{2}{b\,n}}$
Dunnett-Prozedur, einseitig	$DSD_{\alpha;a-1} = \lvert d\rvert_{1-\alpha;a-1,FG_{B(A)}} * s_{B(A)}\sqrt{\frac{2}{b\,n}}$

Beispiel 10.6

Das Beispiel 10.4 wird dahingehend verändert, daß die Zuckerrüben gezielt (und nicht zufällig) und die drei Blätter jeder Zuckerrübe zufällig ausgewählt wurden.
Die Versuchsfragen sind:

- Gibt es bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α=0,05 Unterschiede in der mittleren Kalziumkonzentration der Zuckerrüben?
- Ist die Varianzkomponente der Rübenblätter bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α=0,05 von Null verschieden?

Papier in Bleistift

Der F-Test beantwortet die erste Versuchsfrage mit „ja" und die zweite mit „nein".

Die Varianztabelle war:

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;FG_1,FG_2}$	Test
Gesamt	23	10,27				
Faktor A (Rüben)	3	7,56	2,52	7,64	4,066	signifikant
Faktor B(A) (Blätter)	8	2,63	0,33	47,14	2,849	signifikant
Rest	12	0,08	0,007			

Die signifikant von Null verschiedene Varianzkomponente der Rübenblätter ist

$\hat{\sigma}^2_{B(A)} = s^2_{B(A)} = (MQ_{B(A)} - MQ_{Rest}) / n = (0{,}33 - 0{,}007) / 2 = 0{,}16$

und damit mehr als 20mal größer als die Varianzkomponente des Restes.

Nun ist zwar bekannt, daß es signifikante Unterschiede zwischen der mittleren Kalziumkonzentration der bewußt ausgewählten Zuckerrüben gibt, aber nicht zwischen welchen Rüben. Dazu wird die Tukey-Prozedur gewählt. Mit $q_{1-\alpha;4,8} = 4{,}529$ (Tab. 8.6) ist die Grenzdifferenz

$HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;a,FG_{B(A)}} * s_{B(A)} / \sqrt{b\,n} = 4{,}529 * \sqrt{0{,}33} / \sqrt{3*2} = 1{,}06$.

Die mittlere Kalziumkonzentration der Zuckerrüben ist

Rübe	Mittelwert
1	3,17500
2	2,17833
3	2,95167
4	3,74333

	$\bar{y}_{i\cdot}$		$\bar{y}_{i'\cdot}$	$\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{i'\cdot}$	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
Rübe1	3,175	Rübe2	2,178	0,997	-0,063	2,057	nicht signifikant
		Rübe3	2,952	0,223	-0,837	1,283	nicht signifikant
		Rübe4	3,743	-0,568	-1,628	0,492	nicht signifikant
Rübe2	2,178	Rübe3	2,952	-0,774	-1,834	0,286	nicht signifikant
		Rübe4	3,743	-1,565	-2,625	-0,505	signifikant
Rübe3	2,952	Rübe4	3,743	-0,791	-1,851	0,269	nicht signifikant

Da in einem Fall das Konfidenzintervall die Null nicht einschließt, besteht nur zwischen den mittleren Kalziumkonzentrationen der Rüben 2 und 4 ein signifikanter Unterschied.

SAS

Auch für das gemischte hierarchische Modell können prinzipiell die Prozeduren `glm` , `mixed` und `varcomp` herangezogen werden.

PROC GLM

```
proc glm data=bsp104;
  class ruebe blatt;
  model kalzium=ruebe blatt(ruebe) / ss3;
  random blatt(ruebe);                    die zufälligen Effekte müssen separat benannt werden
  test H=ruebe  E=blatt(ruebe);           der Faktor A wird gegen den Faktor B getestet (s. o.)
                                          H= Zählervarianz , E= Nennervarianz
  means ruebe / E=blatt(ruebe) tukey cldiff nosort;
                                          der Vergleich der Rübenmittelwerte erfolgt bezüglich des
                                          Faktors B (E=  B(A) ), nicht des Restes
run; quit;
```

Das SAS-Output lautet um die doppelten Vergleiche reduziert:

```
General Linear Models Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
RUEBE          4    1 2 3 4
BLATT          3    1 2 3

Number of observations in data set = 24

General Linear Models Procedure
                                                          die Varianztabelle (Modells I)
Dependent Variable: KALZIUM

Source                  DF    Sum of Squares    F Value     Pr > F
Model                   11       10.19054583     139.22     0.0001
Error                   12        0.07985000
Corrected Total         23       10.27039583

                  R-Square              C.V.         KALZIUM Mean
0.992225          2.708195            3.01208333

Source                  DF       Type III SS    F Value     Pr > F
RUEBE                    3        7.56034583     378.73     0.0001
BLATT(RUEBE)             8        2.63020000      49.41     0.0001
                                   Koeffizienten für die Varianzkomponenten (Modell II)
General Linear Models Procedure

Source          Type III Expected Mean Square
RUEBE           Var(Error) + 2 Var(BLATT(RUEBE)) + Q(RUEBE)
BLATT(RUEBE)    Var(Error) + 2 Var(BLATT(RUEBE))
                                                                  Tukey-Prozedur
General Linear Models Procedure

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: KALZIUM

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 8  MSE= 0.328775
Critical Value of Studentized Range= 4.529
Minimum Significant Difference= 1.0601
```

```
Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

               Simultaneous            Simultaneous
                  Lower     Difference    Upper
   RUEBE       Confidence    Between   Confidence
 Comparison       Limit       Means       Limit

1     - 2        -0.0635     0.9967      2.0568
1     - 3        -0.8368     0.2233      1.2835
1     - 4        -1.6285    -0.5683      0.4918

2     - 3        -1.8335    -0.7733      0.2868
2     - 4        -2.6251    -1.5650     -0.5049   ***

3     - 4        -1.8518    -0.7917      0.2685
```

veränderte Zeile der Varianztabelle für das gemischte Modell

```
General Linear Models Procedure

Dependent Variable: KALZIUM

Tests of Hypotheses using the Type III MS for BLATT(RUEBE) as an error term

Source                  DF        Type III SS     F Value      Pr > F
RUEBE                    3         7.56034583        7.67      0.0097
```

Die erforderliche Korrektur der Varianztabelle gemäß des gewählten gemischten Modells bewirkt:

```
test H=ruebe  E=blatt(ruebe);
```

Die Varianzkomponenten sind entsprechend der oben durchgeführten Handrechnung zu schätzen.

PROC MIXED

```
proc mixed data=bsp104 method=mivque0;
  class ruebe blatt;
  model kalzium=ruebe;                in der Modell-Anweisung stehen nur die festen Effekte
  random blatt(ruebe);                in der random-Anweisung stehen nur die zufälligen Effekte
  lsmeans ruebe / adjust=tukey;       Tukey-Prozedur
run; quit;
```

SAS-Output:

```
                        The MIXED Procedure

                      Class Level Information
                     Class     Levels  Values
                     RUEBE          4  1 2 3 4
                     BLATT          3  1 2 3

              Covariance Parameter Estimates (MIVQUE0)

             Cov Parm                Ratio       Estimate
             BLATT(RUEBE)      24.20444584     0.16106042
             Residual           1.00000000     0.00665417

               Model Fitting Information for KALZIUM
              Description                           Value
              Observations                        24.0000
              Variance Estimate                    0.0067
              Standard Deviation Estimate          0.0816
              REML Log Likelihood                  2.5623
              Akaike's Information Criterion       0.5623
              Schwarz's Bayesian Criterion        -0.4334
              -2 REML Log Likelihood              -5.1246
```

dem gemischten Modell entsprechende Zeile der Varianztabelle

```
                                   Tests of Fixed Effects
                          Source       NDF    DDF   Type III F   Pr > F
                          RUEBE          3      8         7.67   0.0097

                                  Least Squares Means

                 Level           LSMEAN       Std Error    DDF       T    Pr > |T|
                 RUEBE 1     3.17500000      0.23408510      8   13.56     0.0001
                 RUEBE 2     2.17833333      0.23408510      8    9.31     0.0001
                 RUEBE 3     2.95166667      0.23408510      8   12.61     0.0001
                 RUEBE 4     3.74333333      0.23408510      8   15.99     0.0001

                             Differences of Least Squares Means
Level 1 Level 2    Difference   Std Error  DDF       T  Pr > |T| Adjustment     Adj P

RUEBE 1 RUEBE 2    0.99666667  0.33104632    8    3.01    0.0168 Tukey         0.0655
RUEBE 1 RUEBE 3    0.22333333  0.33104632    8    0.67    0.5189 Tukey         0.9038
RUEBE 1 RUEBE 4   -0.56833333  0.33104632    8   -1.72    0.1244 Tukey         0.3755
RUEBE 2 RUEBE 3   -0.77333333  0.33104632    8   -2.34    0.0477 Tukey         0.1686
RUEBE 2 RUEBE 4   -1.56500000  0.33104632    8   -4.73    0.0015 Tukey         0.0065
RUEBE 3 RUEBE 4   -0.79166667  0.33104632    8   -2.39    0.0438 Tukey         0.1562
```

Die Überschreitungswahrscheinlichhkeiten der letzten Spalte weisen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha=0{,}05$ auf einen signifikanten Unterschied zwischen den Rüben 2 und 4 hin.

PROC VARCOMP

Mit `proc varcomp` können nur die Varianzkomponenten modellgerecht berechnet werden.

```
proc varcomp data=bsp104 method=mivque0;
  class ruebe blatt;
  model kalzium=ruebe blatt(ruebe) / fixed=1;
```
die ersten n=1 in der Modell-Anweisung aufgeführten Effekte sind fest, alle anderen zufällig
```
run; quit;
```

SAS-Output

```
Variance Components Estimation Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
RUEBE          4    1 2 3 4
BLATT          3    1 2 3

Number of observations in data set = 24

MIVQUE(0) Variance Component Estimation Procedure

SSQ Matrix

Source                BLATT(RUEBE)              Error                KALZIUM
BLATT(RUEBE)           32.00000000        16.00000000             5.26040000
Error                  16.00000000        20.00000000             2.71005000

                                   Estimate
Variance Component                  KALZIUM
Var(BLATT(RUEBE))                0.16106042
Var(Error)                       0.00665417
```

Lösungen

8 Vergleich von mehr als zwei Mittelwerten

Aufgabe 8.1: Vergleichen Sie mit Hilfe eines parameterfreien Verfahrens die mittlere Wirkung der beiden Applikationsverfahren Spritzen und Feinsprühen hinsichtlich des Prüfmerkmals Unkraut-Frischmasse miteinander (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$).

Spritzen	Feinsprühen
8,0	18,2
11,4	18,7
8,6	14,0
15,0	14,9
16,9	15,0
11,9	15,8
10,6	15,7
12,4	12,4

Lösung:

Der in Frage kommende Test ist der Wilcoxon- oder U-Test von Mann-Whitney (s. 6.4.1).

	Spritzen	$Rang_{Spritzen}$	Feinsprühen	$Rang_{Feinsprühen}$
	8,0	1	18,2	15
	11,4	4	18,7	16
	8,6	2	14,0	8
	15,0	10,5	14,9	9
	16,9	14	15,0	10,5
	11,9	5	15,8	13
	10,6	3	15,7	12
	12,4	6,5	12,4	6,5
Summe		46		90

$$U_1 = n_1 * n_2 + \frac{n_1}{2}(n_1+1) - R_1 = 8 * 8 + \frac{8}{2}(8+1) - 46 = 54$$

$$U_2 = n_1 * n_2 + \frac{n_2}{2}(n_2+1) - R_2 = 8 * 8 + \frac{8}{2}(8+1) - 90 = 10$$

Da $\min(U_1,U_2) = U_2 = U = 10 < U_{1-\alpha;\, n1,\, n2} = U_{0{,}975;\, 8,\, 8} = 12$ (Tab. 6.4) muß die Nullhypothese abgelehnt werden. Der Vergleich der beiden Applikationsverfahren zeigt bezüglich des Prüfmerkmals Frischmasse der Parzellenunkräuter, daß sie in ihrer mittleren Wirkung unterschiedlichen Grundgesamtheiten zuzuordnen sind.

Und nach Streichen gleicher Rangzahlen und Neuvergabe der Ränge:

	Spritzen	$Rang_{Spritzen}$	R_1	Feinsprühen	$Rang_{Feinsprühen}$	R_2
	8,0	1	1	18,2	15	11
	11,4	4	4	18,7	16	12
	8,6	2	2	14,0	8	6
	15,0	~~10,5~~		14,9	9	7
	16,9	14	10	15,0	~~10,5~~	
	11,9	5	5	15,8	13	9
	10,6	3	3	15,7	12	8
	12,4	~~6,5~~		12,4	~~6,5~~	
Summe			25			53

$$U_1 = n_1 * n_2 + \frac{n_1}{2}(n_1 + 1) - R_1 = 6 * 6 + \frac{6}{2}(6+1) - 25 = 32$$

$$U_2 = n_1 * n_2 + \frac{n_2}{2}(n_2 + 1) - R_2 = 6 * 6 + \frac{6}{2}(6+1) - 53 = 4$$

Mit $\min(U_1, U_2) = U_2 = U = 4 < U_{1-\alpha;\, n1,\, n2} = U_{0,975;\, 6,\, 6} = 5$ (Tab. 6.4) verändert sich obige Aussage zur Ablehnung der Nullhypothese nicht.

SAS

```
data aufg81;
  input spri fspru;
cards;
 8.0  18.2
11.4  18.7
 8.6  14.0
15.0  14.9
16.9  15.0
11.9  15.8
10.6  15.7
12.4  12.4
;
data daten;
  set aufg81;
  appl = 'Spritzen';  masse= spri;  output;
  appl = 'FSprühen';  masse= fspru; output;
proc npar1way wilcoxon;
  class appl;
  var masse ;
run;
```

Die SAS-Ausgabe liefert zwei Testgrößen: einmal die Testgröße des Wilcoxon- oder U-Testes von Mann-Whitney `Z` und andererseits die Testgröße des Kruskal-Wallis-Testes (H-Test) `CHISQ` als Sonderfall für zwei Stichproben. Die numerischen Unterschiede zwischen beiden Testgrößen resultieren aus der zusätzlichen Stetigkeitskorrektur beim Wilcoxon- oder U-Test. Die Überschreitungswahrscheinlichkeiten weisen für beide Tests auf signifikante Unterschiede in der mittleren Wirkung beider Applikationsverfahren auf die Unkraut-Frischmasse hin.

```
Wilcoxon Scores (Rank Sums) for Variable MASSE
Classified by Variable APPL

                          Sum of      Expected       Std Dev          Mean
   APPL          N        Scores      Under H0      Under H0          Score

   Spritzen      8          46.0          68.0    9.50789146      5.7500000
   FSprühen      8          90.0          68.0    9.50789146     11.2500000
Average Scores Were Used for Ties

Wilcoxon 2-Sample Test (Normal Approximation)
(with Continuity Correction of .5)

S =   46.0000          Z = -2.26128          Prob > |Z| = 0.0237

T-Test Approx. Significance = 0.0390

Kruskal-Wallis Test (Chi-Square Approximation)
CHISQ =  5.3540          DF =  1          Prob > CHISQ = 0.0207
```

Aufgabe 8.2: „Das Peronäus-Nerv-Muskel-Präparat von 6 Katzen, 5 Rhesusaffen und 9 Meerschweinchen wird im Gebiete des Nerven unter Anoxämie gesetzt. Gemessen wird die Zeit, während welcher der Nerv für elektrische Reize leitfähig bleibt." Mit einem parameterfreien Verfahren soll bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ getestet werden, ob „Unterschiede in der anoxämischen Empfindlichkeit der peripheren Nerven zwischen den Tierarten bestehen."[32]

Leitfähigkeit in Minuten

Katze	Affe	Meerschweinchen
17	12	13
26	12	16
33	15	19
40	20	20
45	28	20
55		23
		25
		30
		37

Lösung:

Unabhängig von der Stichprobe werden die Ränge gebildet.

	Katze	Rang	Affe	Rang	Meerschweinchen	Rang
	17	6	12	1.5	13	3
	26	13	12	1,5	16	5
	33	16	15	4	19	7
	40	18	20	9	20	9
	45	19	28	14	20	9
	55	20			23	11
					25	12
					30	15
					37	17
Summe: R_j		92		30		88
Quadrat: R_j^2		8464		900		7744
n_j		6		5		9
R_j^2/n_j		1410,67		180		860,44

$$H = \frac{12}{N*(N+1)} * \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3*(N+1) = \frac{12}{20*(20+1)} * \left[\frac{92^2}{6} + \frac{30^2}{5} + \frac{88^2}{9}\right] - 3*(20+1)$$

$$= \frac{12}{20*21} * [1410,67 + 180 + 860,44] - 3*21 = 7,07$$

$k = 3 \qquad FG = k - 1 = 2$

Der $\chi^2_{0,95;\,2}$-Wert wird in der Tab. 8.1 mit 5,991 abgelesen.

Da $H = 7,03 > \chi^2_{0,95;\,2} = 5,991$ (s. Tabelle 8.1) muß bei der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese - die mittlere Widerstandsfähigkeit gegenüber Sauerstoffmangel der peripheren Nerven der drei Tierarten unterscheidet sich nicht - verworfen werden.

[32] Aufgabenstellung und Daten aus:
LIENERT, G. A.: Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik
Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, Band I, 1973, S. 265 f

Mit der Bindungskorrektur

2 * Rang 1,5
3 * Rang 9

$$H_{korr} = \frac{H}{1 - \frac{\sum_i t_i(t_i^2-1)}{N\,(N^2-1)}} = \frac{7{,}03}{1 - \frac{2*3\ +\ 2*3}{20\ (20^2-1)}} = 7{,}04$$

bleibt die oben getroffene Testaussage dieselbe.

SAS

```
data bsp82;
  input v1-v3;
  tierart = 'Katze    ';
  zeit= v1;
  output;
  tierart = 'Affe     ';
  zeit= v2;
  output;
  tierart = 'Meerschw';
  zeit= v3;
  output;
cards;
17   12   13
26   12   16
33   15   19
40   20   20
45   28   20
55    .   23
 .    .   25
 .    .   30
 .    .   37
;
```

```
data bsp82;
  input tierart $ zeit;
cards;
Katze    17
Katze    26
Katze    33
Katze    40
Katze    45
Katze    55
Affe     12
Affe     12
Affe     15
Affe     20
Affe     28
Meerschw 13
Meerschw 16
Meerschw 19
Meerschw 20
Meerschw 20
Meerschw 23
Meerschw 25
Meerschw 30
Meerschw 37
;
```

```
proc npar1way wilcoxon;
class tierart;
  var zeit ;
run;
```

SAS-Output;

```
N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E

Wilcoxon Scores (Rank Sums) for Variable ZEIT
Classified by Variable TIERART

                          Sum of     Expected      Std Dev          Mean
  TIERART      N          Scores     Under H0     Under H0         Score

  Katze        6            92.0   63.0000000   12.1015441    15.3333333
  Affe         5            30.0   52.5000000   11.4348843     6.0000000
  Meerschw     9            88.0   94.5000000   13.1376818     9.7777778
Average Scores Were Used for Ties

Kruskal-Wallis Test (Chi-Square Approximation)
CHISQ =   7.0583     DF =   2     Prob > CHISQ = 0.0293
```

Sowohl der approximativ χ^2-verteilte H-Wert (`CHISQ = 7.0583`) als auch die Überschreitungswahrscheinlichkeit (`Prob > CHISQ = 0.0293`) zeigen, daß die Nullhypothese bei der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ abgelehnt werden muß.

Aufgabe 8.3: Es sollen drei Unterrichtsmethoden verglichen werden. Dazu wurden 15 Gruppen mit je drei für das Unterrichtsfach etwa gleich leistungsstarken Schülern gebildet. Die Schüler jeder Gruppe wurden zufällig den Unterrichtsmethoden zugeordnet. Das Prüfmerkmal ist die erreichte Punkteanzahl in einer nach Abschluß des Versuches geschriebenen Kontrollarbeit.
Die Nullhypothese - es gibt hinsichtlich der mittleren Punkteanzahl keine Unterschiede zwischen den Unterrichtsmethoden - ist gegen die Alternativhypothese - es gibt Unterschiede - bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ zu testen.[33]

	erreichte Punkteanzahl bei		
Blocks	Methode 1	Methode 2	Methode 3
1	13	15	16
2	15	13	17
3	12	14	15
4	14	15	16
5	12	14	15
6	13	13	17
7	11	14	9
8	13	12	13
9	11	12	15
10	12	14	13
11	9	10	13
12	11	14	14
13	10	9	9
14	7	9	14
15	10	6	8

Lösung:

Über die Blocks werden die Ränge gebildet und je Methode aufsummiert:

	Ränge der erreichte Punkteanzahl bei		
Blocks	Methode 1	Methode 2	Methode 3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	1	2	3
4	1	2	3
5	1	2	3
6	1,5	1,5	3
7	2	3	1
8	2,5	1	2,5
9	1	2	3
10	1	3	2
11	1	2	3
12	1	2,5	2,5
13	3	1,5	1,5
14	1	2	3
15	3	1	2
Summe	23	28,5	38,5

Bei a = 3 Methoden und n = 15 Blocks ist der Wert der Testgröße

[33] aus: CLAUß, G. und H. EBNER: Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen Volk und Wissen, Berlin, 1974, S. 315, 350

$$F_{Beh} = \frac{12}{n\,a(a+1)}\sum_{i=1}^{a} R_{Beh}^2 - 3n(a+1) = \frac{12}{15*3*4}\left[23^2 + 28{,}5^2 + 38{,}5^2\right] - 3*15*4 \quad = 8{,}233 \quad .$$

Mit Bindungskorrektur verändert sich die Testgröße:

Rang	Häufigkeit
1,5	2
2,5	2
2,5	2
1,5	2

$$F_{Beh}^{korr} = \frac{F_{Beh}}{1 - \frac{1}{na(a-1)(a+1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij}^3\right) - a\right]} = \frac{8{,}233}{1 - \frac{1}{15*3*2*4}\left\{(2^3-3)+(2^3-3)+(2^3-3)+(2^3-3)\right\}} = 8{,}718$$

Da für FG = a - 1 = 2 das χ^2-Quantil $\chi^2_{0,95;\,2} = 5{,}991$ (s. Tabelle 8.1) kleiner als die berechneten Testgrößen ist, muß die Nullhypothese abgelehnt werden. Die Leistung der Schüler hängt gemessen an der in der Kontrollarbeit erreichten Punkteanzahl von der Unterrichtsmethode ab.

Bemerkung: Dieser Test ist ein approximativer Test. Besonders bei kleinen Werten von a ist Vorsicht geboten. Bei obiger Größe des Abstandes zwischen der Testgröße und dem χ^2-Quantil kann die Nullhypothese ohne Einschränkungen abgelehnt werden.

SAS

```
data aufg83;
  input wdhlg meth1 meth2 meth3;
  methode='Meth1'; punkte=meth1; output;
  methode='Meth2'; punkte=meth2; output;
  methode='Meth3'; punkte=meth3; output;
cards;
 1      1       2       3
 2      2       1       3
 3      1       2       3
 4      1       2       3
 5      1       2       3
 6      1.5     1.5     3
 7      2       3       1
 8      2.5     1       2.5
 9      1       2       3
10      1       3       2
11      1       2       3
12      1       2.5     2.5
13      3       1.5     1.5
14      1       2       3
15      3       1       2
;
proc freq;
  tables wdhlg*methode*punkte / noprint cmh2 scores=rank;
run;
```

Das Output führt zur gleichen Aussage (`Row Mean Scores Differ`):

```
SUMMARY STATISTICS FOR METHODE BY PUNKTE
CONTROLLING FOR WDHLG

  Cochran-Mantel-Haenszel Statistics (Based on Rank Scores)

Statistic   Alternative Hypothesis    DF        Value       Prob
-----------------------------------------------------------------
    1       Nonzero Correlation        1        8.580      0.003
    2       Row Mean Scores Differ     2        8.821      0.012

Total Sample Size = 45
```

Aufgabe 8.4: Vergleichen Sie das mittlere prozentuale Erdgasaufkommen der Jahre 1988-1995[34] in

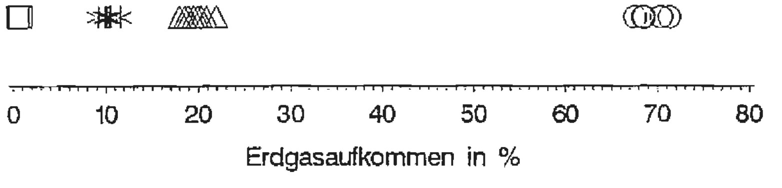
	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Westeuropa	71.3	68.4	67.6	68.6	68.6	70.4	70.5	68.5
Rußland	18.0	20.9	22.0	20.3	19.0	18.6	19.5	19.9
Algerien	10.2	10.1	9.9	10.5	11.6	10.4	9.2	10.5
Libyen	0.5	0.6	0.5	0.6	0.8	0.5	0.5	0.5

Lösung:

Bemerkung: Die Daten wurden nicht mit dem Ziel eines Vergleichs des mittleren prozentualen Erdgasaufkommens veröffentlicht. Diese Aufgabe wurde nur zur Veranschaulichung gestellt.

Die Jahre werden als echte Wiederholungen angesehen. Die statistischen Maßzahlen und ein Blick auf die Verteilung der Daten

	Mittelwert	Standard-abweichung	Varianz	Symbol
Westeuropa	69.2375000	1.3059616	1.7055357	O
Rußland	19.7750000	1.2936659	1.6735714	Δ
Algerien	10.3000000	0.6761234	0.4571429	*
Libyen	0.5625000	0.1060660	0.0112500	□



zeigen, daß das Rechnen einer Varianzanalyse nur ein formaler Akt sein kann: die Daten können nicht ein und derselben Grundgesamtheit angehören. Ein Test mit der Zielstellung des Vergleiches der mittleren prozentualen Erdgasaufkommen der Jahre 1988-1995 ist völlig überflüssig.

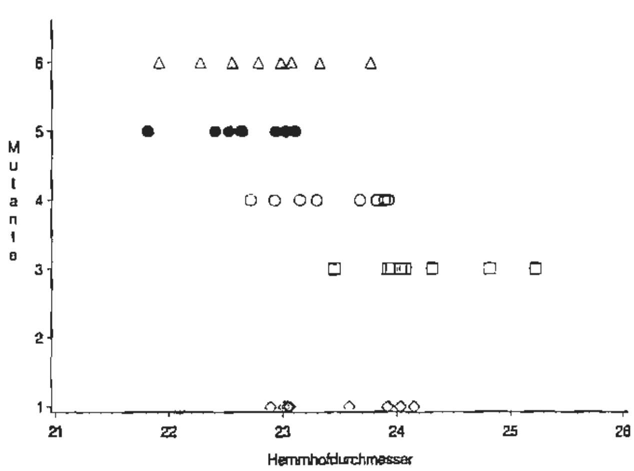
[34] Daten aus: Erdgas 1996, Erdgasaufkommen in Westeuropa, S. 10
Herausgeber: Ruhrgas Aktiengesellschaft, Presse-/Öffentlichkeitsarbeit, 25 S.

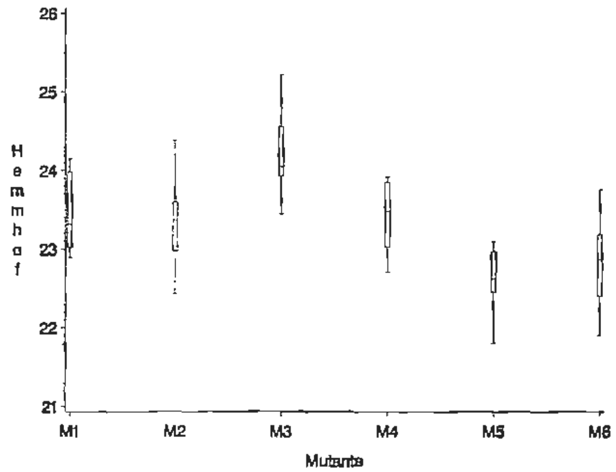
Aufgabe 8.5: Die Hemmhöfe von sechs Mutanten M1 bis M6 eines Penicillin produzierenden Mikroorganismusstammes werden in Millimetern gemessen. Je größer die Hemmhöfe sind, um so mehr Penicillin wird produziert[35]. Berechnen Sie für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ die Varianztabelle.

M1	M2	M3	M4	M5	M6
23.92	23.25	24.81	23.92	22.93	21.91
23.06	23.18	24.03	23.82	22.40	23.07
23.04	23.70	23.95	22.71	22.64	22.98
24.15	22.78	24.31	22.92	21.81	23.77
23.01	24.38	23.45	23.67	23.02	22.55
22.89	22.43	23.92	23.29	23.10	23.32
24.03	23.51	24.07	23.89	22.52	22.27
23.58	23.49	25.22	23.14	22.62	22.78

Lösung:

Die Grafiken zeigen, daß die Variabilität der Hemmdurchmesser der Mutanten ähnlich ist:





Papier und Bleistift

Die notwendigen Summen und Quadrate sind:

M1	M2	M3	M4	M5	M6	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$
23,92	23,25	24,81	23,92	22,93	21,91	
23,06	23,18	24,03	23,82	22,40	23,07	
23,04	23,70	23,95	22,71	22,64	22,98	
24,15	22,78	24,31	22,92	21,81	23,77	
23,01	24,38	23,45	23,67	23,02	22,55	
22,89	22,43	23,92	23,29	23,10	23,32	
24,03	23,51	24,07	23,89	22,52	22,27	
23,58	23,49	25,22	23,14	22,62	22,78	
187,68	186,72	193,76	187,36	181,04	182,65	1119,21

[35] aus: HORN, M. und R. VOLLANDT: Multiple Tests und Auswahlverfahren Gustav Fisher Verlag, Stuttgart Jena, 1995, S. 3

	$M1^2$	$M2^2$	$M3^2$	$M4^2$	$M5^2$	$M6^2$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2$
	572,17	540,56	615,54	572,17	525,78	480,05	
	531,76	537,31	577,44	567,39	501,76	532,22	
	530,84	561,69	573,60	515,74	512,57	528,08	
	583,22	518,93	590,98	525,33	475,68	565,01	
	529,46	594,38	549,90	560,27	529,92	508,50	
	523,95	503,10	572,17	542,42	533,61	543,82	
	577,44	552,72	579,36	570,73	507,15	495,95	
	556,02	551,78	636,05	535,46	511,66	518,93	
Σ	4404,86	4360,48	4695,04	4389,51	4098,14	4172,57	26120,61

$$\text{Subtraktionsglied Sgl} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{N} = \frac{1119{,}21*1119{,}21}{8*6} = 26096{,}48 \quad \text{(Hilfsgröße)}$$

$$SQ_{gesamt} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - Sgl = 26120{,}61 - 26096{,}48 = 24{,}13$$

$$FG_{gesamt} = N - 1 = 48 - 1 = 47$$

$$MQ_{gesamt} = s^2_{gesamt} = \frac{SQ_{gesamt}}{FG_{gesamt}} = \frac{24{,}13}{47} = 0{,}51$$

$$SQ_{zwischen} = \sum_{i=1}^{a} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{r_i} - Sgl = \frac{187{,}68^2}{8} + \frac{186{,}72^2}{8} + \frac{193{,}76^2}{8} + \frac{187{,}36^2}{8} + \frac{181{,}04^2}{8} - Sgl$$

$$= 26108{,}92 - 26096{,}48 = 12{,}44$$

$$FG_{zwischen} = a - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$MQ_{zwischen} = s^2_{zwischen} = \frac{SQ_{zwischen}}{FG_{zwischen}} = \frac{12{,}44}{5} = 2{,}49$$

$$SQ_{innerhalb} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)^2}{r_i} = SQ_{gesamt} - SQ_{zwischen} = 24{,}13 - 12{,}44 = 11{,}69$$

$$FG_{innerhalb} = N - a = 48 - 6 = 42 \qquad = FG_{gesamt} - FG_{zwischen}$$

$$MQ_{innerhalb} = s^2_{innerhalb} = \frac{SQ_{innerhalb}}{FG_{innerhalb}} = \frac{11{,}69}{42} = 0{,}28$$

$$F = \frac{s^2_{zwischen}}{s^2_{innerhalb}} = \frac{2{,}49}{0{,}28} = 8{,}89$$

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;5,42}$	Test
gesamt	47	24,13				
zwischen den Faktorstufen (Mutanten)	5	12,44	2,49	8,89	2,44	signifikant
innerhalb der Faktorstufen (Rest)	42	11,69	0,28			

Zwischen den Stichproben der sechs Mutanten gibt es hinsichtlich der mittleren Hemmhofdurchmesser signifikante Unterschiede.

EXCEL

Anova: Einfaktorielle Varianzanalyse

ZUSAMMENFASSUNG

Gruppen	*Anzahl*	*Summe*	*Mittelwert*	*Varianz*
M1	8	187,68	23,460	0,2701
M2	8	186,72	23,340	0,3483
M3	8	193,76	24,220	0,3101
M4	8	187,36	23,420	0,2204
M5	8	181,04	22,630	0,1715
M6	8	182,65	22,831	0,3492

ANOVA

Streuungsursache	*Quadratsummen (SS)*	*Freiheitsgrade (df)*	*Mittlere Quadratsumme (MS)*	*Prüfgröße (F)*	*P-Wert*	*kritischer F-Wert*
Unterschiede zwischen den Gruppen	12,439	5	2,488	8,940	0,000008	2,438
Innerhalb der Gruppen	11,687	42	0,278			
Gesamt	24,127	47				

SAS

```
data aufg85;
  input m1-m6;
  mutante='M1'; hemmhof=m1; output;
  mutante='M2'; hemmhof=m2; output;
  mutante='M3'; hemmhof=m3; output;
  mutante='M4'; hemmhof=m4; output;
  mutante='M5'; hemmhof=m5; output;
  mutante='M6'; hemmhof=m6; output;
cards;
23.92  23.25  24.81  23.92  22.93  21.91
23.06  23.18  24.03  23.82  22.40  23.07
23.04  23.70  23.95  22.71  22.64  22.98
24.15  22.78  24.31  22.92  21.81  23.77
23.01  24.38  23.45  23.67  23.02  22.55
22.89  22.43  23.92  23.29  23.10  23.32
24.03  23.51  24.07  23.89  22.52  22.27
23.58  23.49  25.22  23.14  22.62  22.78
;
proc glm data=aufg85;
  class mutante;
  model hemmhof = mutante / ss3;
  means mutante / hovtest=levene;
run;
```

SAS-Output:

```
General Linear Models Procedure
Class Level Information

Class      Levels     Values
MUTANTE         6     M1 M2 M3 M4 M5 M6

Number of observations in data set = 48

General Linear Models Procedure
Dependent Variable: HEMMHOF

Source              DF    Sum of Squares    Mean Square    F Value    Pr > F
Model                5       12.43934375     2.48786875       8.94    0.0001
Error               42       11.68748750     0.27827351
Corrected Total     47       24.12683125

             R-Square              C.V.        Root MSE          HEMMHOF Mean
             0.515581          2.262380      0.52751636           23.31687500

Source              DF       Type III SS    Mean Square    F Value    Pr > F
MUTANTE              5       12.43934375     2.48786875       8.94    0.0001

General Linear Models Procedure

         Levene's Test for Equality of HEMMHOF Variance
          ANOVA of Squared Deviations from Group Means

                          Sum of        Mean
Source            DF     Squares      Square         F Value     Pr > F
MUTANTE            5      0.1578      0.0316          0.3583     0.8740
Error             42      3.6999      0.0881

General Linear Models Procedure

Level of          -----------HEMMHOF-----------
MUTANTE      N        Mean               SD

M1           8      23.4600000        0.51972520
M2           8      23.3400000        0.59015736
M3           8      24.2200000        0.55685340
M4           8      23.4200000        0.46946778
M5           8      22.6300000        0.41414283
M6           8      22.8312500        0.59096622
```

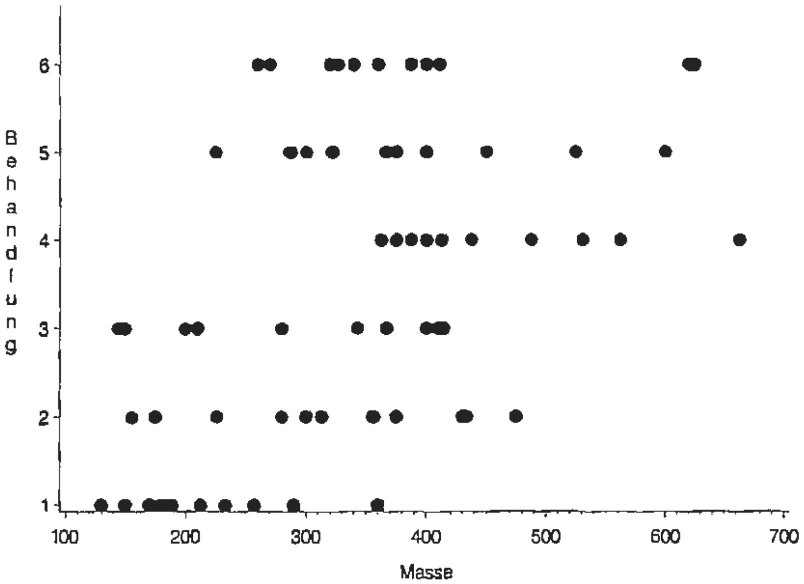
Mindestens eine Mutante unterscheidet sich hinsichtlich des mittleren Durchmessers der Hemmhöfe bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ signifikant von den anderen. Der Test auf Varianzhomogenität bestätigt eine derartige Annahme.

Aufgabe 8.6: Sechs verschiedene Behandlungen gegen Endfäule an Gurken einer Sorte im Gewächshaus sollen verglichen werden. Das Prüfmerkmal ist die Masse pro Teilstück. Die zufällige Anordnung der Teilstücke war gegeben. Berechnen Sie die Varianztabelle für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$.

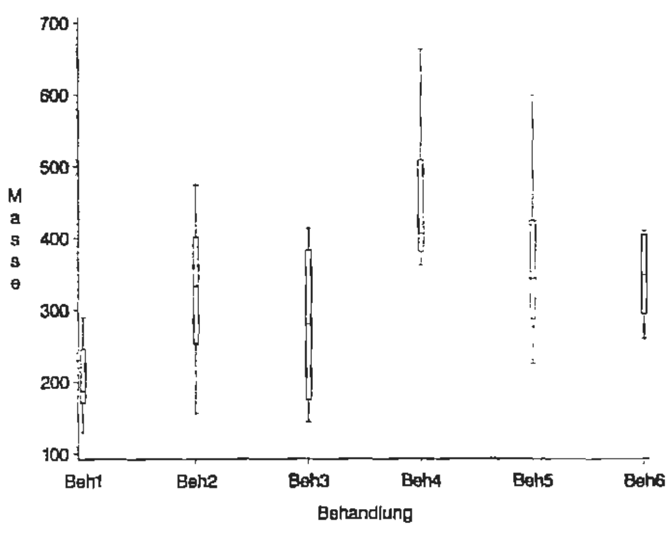
Beh1	Beh2	Beh3	Beh4	Beh5	Beh6
233.3	375.0	400.0	400.0	450.0	400.0
212.5	355.5	410.0	437.5	287.5	340.0
188.9	175.0	144.4	375.0	322.2	625.0
171.4	280.0	280.0	562.5	525.0	620.0
130.0	300.0	414.3	662.5	287.5	360.0
150.0	155.5	150.0	412.5	400.0	411.1
185.7	312.5	144.0	362.5	300.0	320.0
290.0	430.0	200.0	387.5	600.0	270.0
180.0	475.0	342.8	387.5	375.0	260.0
257.1	433.3	366.7	487.5	366.7	260.0
170.0	356.3	280.0	375.0	225.0	387.5
360.0	225.8	210.0	530.7	286.6	326.5

Lösung:

Einen Eindruck von den Daten, besonders ihrer Variabilität, sollen nachstehende Grafiken liefern.



Einzelwerte



Box-Plot

EXCEL

Anova: Einfaktorielle Varianzanalyse

ZUSAMMENFASSUNG

Gruppen	*Anzahl*	*Summe*	*Mittelwert*	*Varianz*
Beh1	12	2528,9	210,742	4244,2372
Beh2	12	3873,9	322,825	10316,7457
Beh3	12	3342,2	278,517	11441,2888
Beh4	12	5380,7	448,392	8771,04083
Beh5	12	4425,5	368,792	12092,8427
Beh6	12	4580,1	381,675	15307,0039

ANOVA

Streuungsursache	*Quadratsummen (SS)*	*Freiheitsgrade (df)*	*Mittlere Quadratsumme (MS)*	*Prüfgröße (F)*	*P-Wert*	*kritischer F-Wert*
Unterschiede zwischen den Gruppen	419480,227	5	83896,0455	8,09635992	5,2966E-06	2,35380782
Innerhalb der Gruppen	683904,749	66	10362,1932			
Gesamt	1103384,98	71				

Die sehr kleine Überschreitungswahrscheinlichkeit besagt, daß die Nullhypothese abzulehnen ist. Zwischen den Behandlungen gibt es hinsichtlich ihrer mittleren Wirkung Unterschiede.

SAS

Programm:

```
data aufg86;
  input beh1-beh6;
  beh='Beh1'; masse=beh1; output;
  beh='Beh2'; masse=beh2; output;
  beh='Beh3'; masse=beh3; output;
  beh='Beh4'; masse=beh4; output;
  beh='Beh5'; masse=beh5; output;
  beh='Beh6'; masse=beh6; output;
cards;
233.3  375.0  400.0  400.0  450.0  400.0
212.5  355.5  410.0  437.5  287.5  340.0
188.9  175.0  144.4  375.0  322.2  625.0
171.4  280.0  280.0  562.5  525.0  620.0
130.0  300.0  414.3  662.5  287.5  360.0
150.0  155.5  150.0  412.5  400.0  411.1
185.7  312.5  144.0  362.5  300.0  320.0
290.0  430.0  200.0  387.5  600.0  270.0
180.0  475.0  342.8  387.5  375.0  260.0
257.1  433.3  366.7  487.5  366.7  260.0
170.0  356.3  280.0  375.0  225.0  387.5
360.0  225.8  210.0  530.7  286.6  326.5
;
proc glm data=aufg86;
  class beh;
  model masse = beh / ss3;
  means beh / hovtest=levene;
run;
```

Das SAS-Output führt zur gleichen Schlußfolgerung. Signifikante Varianzunterschiede liegen nicht vor.

```
General Linear Models Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values
BEH            6    Beh1 Beh2 Beh3 Beh4 Beh5 Beh6

Number of observations in data set = 72

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: MASSE

Source                DF     Sum of Squares      Mean Square   F Value    Pr > F
Model                  5    419480.22736111   83896.04547222      8.10    0.0001
Error                 66    683904.74916667   10362.19316919
Corrected Total       71   1103384.97652778

               R-Square               C.V.         Root MSE          MASSE Mean
               0.380176           30.37230     101.79485827        335.15694444

Source                DF        Type III SS      Mean Square   F Value    Pr > F
BEH                    5    419480.22736111   83896.04547222      8.10    0.0001

General Linear Models Procedure

         Levene's Test for Equality of MASSE Variance
         ANOVA of Squared Deviations from Group Means

                       Sum of        Mean
Source          DF    Squares       Square       F Value     Pr > F
BEH              5   6.9145E8     1.3829E8       0.7993      0.5542
Error           66   1.142E10     1.7302E8

General Linear Models Procedure

Level of          ------------MASSE------------
BEH          N        Mean                SD

Beh1        12     210.741667        65.147810
Beh2        12     322.825000       101.571382
Beh3        12     278.516667       106.963960
Beh4        12     448.391667        93.653835
Beh5        12     368.791667       109.967462
Beh6        12     381.675000       123.721477
```

Aufgabe 8.7: Aufbauend auf die Aufgabe 8.6 (sechs verschiedene Behandlungen gegen Endfäule an Gurken ... , $\alpha = 0.05$) sollen als Rechenbeispiele für die Anwendung multipler Mittelwertvergleiche folgende Fragestellungen, die unabhängig voneinander sind, untersucht werden.

a) Unterscheiden sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ in ihrer mittleren Wirkung voneinander die Behandlungen
Beh1 und Beh5 , Beh5 und Beh6 , Beh3 und Beh4 ?

b) Welche Behandlungen unterscheiden sich in ihrer mittleren Wirkung paarweise von den anderen (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$) ?

c) Gibt es Behandlungen, die sich in ihrer mittleren Wirkung von Standard Beh2 signifikant unterscheiden (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$) ?

Lösung:

Papier und Bleistift

	Aufgabe 8.7 a	Aufgabe 8.7 b	Aufgabe 8.7 c
multipler Mittelwert-vergleich	multipler t-Test	Tukey-Prozedur	Dunnett-Prozedur
Grenz-differenz GD_α	$LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{2}{n}}$	$HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n}$	$DSD_{\alpha;k} = \lvert d\rvert_{1-\alpha/2;k,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{2}{n}}$

Bekannt sind:

a	$= 6$	s^2_{Rest}	$= 10362,193$
k	$= 5$	FG_{Rest}	$= N - a = 66$
$n_i = n$	$= 12$	α	$= 0,05$

Quantil der Verteilung der Mittelwertdifferenzen	(lineare) Interpolation aus		SAS-Funktionsaufruf	
$t_{1-\alpha/2;FG_{Rest}} = t_{0,975;66}$	Tab. 5.4	1,997	`tinv(0.975,66)`	1.997
$q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} = q_{0,95;6,66}$	Tab. 8.6	4,153	`probmc("RANGE",.,0.95,66,6)`	4.151
$\lvert d\rvert_{1-\alpha/2;k,FG_{Rest}} = \lvert d\rvert_{0,975;5,66}$	Tab. 8.7 a	2,577	`probmc("DUNNETT2",.,0.95,66,5)`	2.576

a) *multipler t-Test*

$$LSD_\alpha = t_{1-\alpha/2,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{2}{n}} = 1,997 * \sqrt{10362,193} * \sqrt{\frac{2}{12}} = 82,990$$

Die mittlere Wirkung der Behandlungen Beh1 u. Beh5 , Beh5 u. Beh6 und Beh3 u. Beh4 soll auf der Grundlage der aus den Stichproben ermittelten Schätzwerte verglichen werden.

Mittelwerte		Differenz	(1-α)-Konfidenzintervall		Test
Beh1 210,742	Beh5 368,792	-158,050	-241,040	-75,060	signifikant
Beh5 368,792	Beh6 381,675	-12,883	-95,873	70,107	nicht signifikant
Beh3 278,517	Beh4 448,392	-169,875	-252,865	-86,885	signifikant

b) *Tukey-Prozedur*

$$HSD_{\alpha;a} = q_{1-\alpha;a,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n} = 4{,}151 * \sqrt{10362{,}193} / \sqrt{12} = 121{,}980$$

$\bar{y}_i$		$\bar{y}_{i'}$		$\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}$	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
Beh1	210.742	Beh2	322.825	-112,083	-234,063	9,897	nicht signifikant
		Beh3	278.517	-67,775	-189,755	54,205	nicht signifikant
		Beh4	448.392	-237,650	-359,630	-115,670	signifikant
		Beh5	368.792	-158,050	-280,030	-36,070	signifikant
		Beh6	381.675	-170,933	-292,913	-48,953	signifikant
Beh2	322.825	Beh3	278.517	44,308	-77,672	166,288	nicht signifikant
		Beh4	448.392	-125,567	-247,547	-3,587	signifikant
		Beh5	368.792	-45,967	-167,947	76,013	nicht signifikant
		Beh6	381.675	-58,850	-180,830	63,130	nicht signifikant
Beh3	278.517	Beh4	448.392	-169,875	-291,855	-47,895	signifikant
		Beh5	368.792	-90,275	-212,255	31,705	nicht signifikant
		Beh6	381.675	-103,158	-225,138	18,822	nicht signifikant
Beh4	448.392	Beh5	368.792	79,600	-42,380	201,580	nicht signifikant
		Beh6	381.675	66,717	-55,263	188,697	nicht signifikant
Beh5	368.792	Beh6	381.675	-12,883	-134,863	109,097	nicht signifikant

c) *Dunnett-Prozedur*

$$DSD_{\alpha;k} = |d|_{1-\alpha/2;k,FG_{Rest}} * s_{Rest} \sqrt{\frac{2}{n}} = 2{,}576 * \sqrt{10362{,}193} * \sqrt{\frac{2}{12}} = 107{,}053$$

		Beh2 322,825	(1-α)-Konfidenzintervall untere Grenze	obere Grenze	Test
Beh1	210,742	-112,083	-219,136	-5,030	signifikant
Beh3	278,517	-44,308	-151,361	62,745	nicht signifikant
Beh4	448,392	125,567	18,514	232,620	signifikant
Beh5	368,792	45,967	-61,086	153,020	nicht signifikant
Beh6	381,675	58,850	-48,203	165,903	nicht signifikant

SAS

a) *multipler t-Test*

SAS-Programm

```
title1 'Aufgabe 8.7 a  - multipler t-Test';
title2 '--------------------------------';
proc glm data=aufg86;
  class beh;
  model masse = beh / ss3;
  means beh/ t cldiff nosort;
run;
```

```
Aufgabe 8.7 a  - multipler t-Test;
----------------------------------
```

SAS-Output
ohne Varianztabelle (s. Aufgabe 8.6)
reduziert um die doppelten Vergleiche

```
T tests (LSD) for variable: MASSE

NOTE: This test controls the type I comparisonwise error rate not the
      experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 66  MSE= 10362.19
Critical Value of T= 1.99656
Least Significant Difference= 82.972

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.
```

BEH Comparison	Lower Confidence Limit	Difference Between Means	Upper Confidence Limit		
Beh1 - Beh2	-195.06	-112.08	-29.11	***	
Beh1 - Beh3	-150.75	-67.77	15.20		
Beh1 - Beh4	-320.62	-237.65	-154.68	***	
Beh1 - Beh5	-241.02	-158.05	-75.08	***	⇐
Beh1 - Beh6	-253.91	-170.93	-87.96	***	
Beh2 - Beh3	-38.66	44.31	127.28		
Beh2 - Beh4	-208.54	-125.57	-42.59	***	
Beh2 - Beh5	-128.94	-45.97	37.01		
Beh2 - Beh6	-141.82	-58.85	24.12		
Beh3 - Beh4	-252.85	-169.88	-86.90	***	⇐
Beh3 - Beh5	-173.25	-90.28	-7.30	***	
Beh3 - Beh6	-186.13	-103.16	-20.19	***	
Beh4 - Beh5	-3.37	79.60	162.57		
Beh4 - Beh6	-16.26	66.72	149.69		
Beh5 - Beh6	-95.86	-12.88	70.09		⇐

Gemäß Aufgabenstellung dürfen nur die markierten Vergleiche (⇐) betrachtet werden.

b) *Tukey-Prozedur*

SAS-Programm

```
title1 'Aufgabe 8.7 b  - Tukey Prozedur';
title2 '-------------------------------';
proc glm data=aufg86;
  class beh;
  model masse = beh;
  means beh/ tukey cldiff nosort;
run;
```

```
Aufgabe 8.7 b  - Tukey Prozedur
-------------------------------
```

SAS-Output
ohne Varianztabelle (s. Aufgabe 8.6)
ohne die doppelten Vergleiche

```
Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: MASSE

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 66  MSE= 10362.19
Critical Value of Studentized Range= 4.151
Minimum Significant Difference= 121.98

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.
```

```
                 Simultaneous                 Simultaneous
                    Lower      Difference        Upper
     BEH         Confidence     Between       Confidence
  Comparison        Limit        Means           Limit

Beh1 - Beh2       -234.06      -112.08          9.89
Beh1 - Beh3       -189.75       -67.77         54.20
Beh1 - Beh4       -359.63      -237.65       -115.67   ***
Beh1 - Beh5       -280.03      -158.05        -36.07   ***
Beh1 - Beh6       -292.91      -170.93        -48.96   ***

Beh2 - Beh3        -77.67        44.31        166.28
Beh2 - Beh4       -247.54      -125.57         -3.59   ***
Beh2 - Beh5       -167.94       -45.97         76.01
Beh2 - Beh6       -180.83       -58.85         63.13

Beh3 - Beh4       -291.85      -169.88        -47.90   ***
Beh3 - Beh5       -212.25       -90.28         31.70
Beh3 - Beh6       -225.13      -103.16         18.82

Beh4 - Beh5        -42.38        79.60        201.58
Beh4 - Beh6        -55.26        66.72        188.69

Beh5 - Beh6       -134.86       -12.88        109.09
```

c) *Dunnett-Prozedur*

SAS-Programm

```
title1 'Aufgabe 8.7 c  - Dunnett-Prozedur (zweiseitig)';
title2 '---------------------------------------------';
proc glm data=aufg86;
  class beh;
  model masse = beh / ss3;
  means beh/dunnett('Beh2');
run;
```

SAS-Output
ohne Varianztabelle (s. Aufgabe 8.6)

```
Aufgabe 8.7 c  - Dunnett-Prozedur (zweiseitig)
----------------------------------------------

Dunnett's T tests for variable: MASSE

NOTE: This tests controls the type I experimentwise error for comparisons
      of all treatments against a control.

Alpha= 0.05  Confidence= 0.95  df= 66  MSE= 10362.19
Critical Value of Dunnett's T= 2.576
Minimum Significant Difference= 107.05

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

                 Simultaneous                 Simultaneous
                    Lower      Difference        Upper
     BEH         Confidence     Between       Confidence
  Comparison        Limit        Means           Limit

Beh4 - Beh2         18.52       125.57        232.61   ***
Beh6 - Beh2        -48.20        58.85        165.90
Beh5 - Beh2        -61.08        45.97        153.01
Beh3 - Beh2       -151.36       -44.31         62.74
Beh1 - Beh2       -219.13      -112.08         -5.04   ***
```

9 Einfaktorielles Varianzanalysemodell mit zufälligen Effekten (Modell II)

Aufgabe 9.1: Fünf Bullen B1 bis B5 werden aus einer größeren Menge zufällig ausgewählt. Die Milchfettleistungen der weiblichen Nachkommen in der ersten Laktation werden untersucht. Die Varianzkomponente, die durch die verschiedenen Väter bei den Milchfettleistungen ihrer Nachkommen verursacht wird, soll geschätzt und mit Null verglichen werden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist $\alpha = 0{,}05$.[36]

B1	B2	B3	B4	B5
155	135	108	124	142
147	143	140	163	110
150	128	122	145	121
106	140	107	113	119
134	143	152	143	131
105	157	133	159	142
105	164	116	161	130
153	133	114	150	127
162	142	148	155	101
135	149	156	129	138
105	159	136	105	104
163		113		150

Lösung:

Papier und Bleistift

Die Varianztabelle lautet:

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;4,53}$	Test
Gesamt	57	20392,276				
zwischen den Bullen (Faktor A)	4	2795,594	698,90	2,11	2,546	nicht signifikant
innerhalb der Bullen (Rest)	53	17596,682	332,01			

a = 5
N = 58
MQ_A = 698,90
MQ_{Rest} = 332,01 $= s^2_{Rest} = \hat{\sigma}^2_{Rest}$

$$\frac{1}{a-1}\left(N-\frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{N}\right)=\frac{1}{5-1}\left(58-\frac{12^2+11^2+12^2+11^2+12^2}{58}\right)=11{,}595$$

Aus $\hat{\sigma}^2_{Rest} + 11{,}595\,\hat{\sigma}^2_{Bullen}$ = 698,90 folgt $\hat{\sigma}^2_{Bullen} = s^2_{Bullen}$ = (698,90-332,01)/11,595 = 31,64. Das Verhältnis der Varianzkomponenten ist $\sigma^2_{Rest} : \sigma^2_{Bullen}$ = 10,5 : 1.

Die Nullhypothese H_0: $\sigma^2_{Bullen} = 0$ kann nicht verworfen werden, die Anzahl der ausgewählten Bullen ist zweifelsohne zu gering, um die Varianzkomponente zu bewerten. (Im Originalbeispiel ergibt sich bei 10 Bullen eine signifikant von Null verschiedene Varianzkomponente.)

[36] Beispiel 7.2 , gekürzt von 10 auf 5 Bullen, aus:
RASCH, D.; ENDERLEIN, G. und G. HERRENDÖRFER: Biometrie. Verfahren, Tabellen, Angewandte Statistik, VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1973, S. 137f

EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1	B1	B2	B3	B4	B5		Anova: Einfaktorielle Varianzanalyse								
2	155	135	108	124	142										
3	147	143	140	163	110		ZUSAMMENFASSUNG								
4	150	128	122	145	121		*Gruppen*	*Anzahl*	*Summe*	*Mittelwert*	*Varianz*				
5	106	140	107	113	119		B1	12	1620	135,000	558,909				
6	134	143	152	143	131		B2	11	1593	144,818	129,164				
7	105	157	133	159	142		B3	12	1545	128,750	311,659				
8	105	164	116	161	130		B4	11	1547	140,636	401,655				
9	153	133	114	150	127		B5	12	1515	126,250	246,568				
10	162	142	148	155	101										
11	135	149	156	129	138		ANOVA								
12	105	159	136	105	104		*Streuungs-*		*Quadrat-*	*Freiheits-*	*Mittlere*	*Prüfgröße*	*P-Wert*	*kritischer*	
13	163		113		150		*ursache*		*summen*	*grade*	*Quadrat-*	*(F)*		*F-Wert*	
14									*(SS)*	*(df)*	*summe (MS)*				
15							Unterschiede								
16							zw. d. Gruppen		2795,594	4	698,89851	2,1050344	0,0930954	2,5462725	
17							Innerhalb								
18							der Gruppen		17596,682	53	332,01286				
19															
20							Gesamt		20392,276	57					
21															
22															
23							N = 58			S ni**2 =	674,000				
24															
25								*summe(H5:H9)*			*H5^2+H6^2+H7^2+H8^2+H9^2*				
26															
27							Koeffizient=	11,595	*sA**2 =*	31,64218		*sRest**2 : sA**2 =*		10,5	: 1
28															
29								*(H23-K23/H23)/(5-1)*		*(K16-K18)/H27*				*K18/H27*	
30															
31							rho =	0,09							
32															
33								*J27/(J27+K18)*							

Der F-Test zeigt, daß die Varianzkomponente Bullen nicht signifikant von Null verschieden ist, was auch für den (geringen) Intraklasskorrelationskoeffizienten gilt. Die Varianzkomponente des Restes ist mehr als zehnmal so groß wie die durch die Bullen bei der Milchfettleistung der weiblichen Nachkommen verursachte.

SAS

```
data aufg91;
  input b1-b5;
  bulle = 'B1'; milchfet = b1; output;
  bulle = 'B2'; milchfet = b2; output;
  bulle = 'B3'; milchfet = b3; output;
  bulle = 'B4'; milchfet = b4; output;
  bulle = 'B5'; milchfet = b5; output;
cards;
155       135       108       124       142
147       143       140       163       110
150       128       122       145       121
106       140       107       113       119
134       143       152       143       131
105       157       133       159       142
105       164       116       161       130
153       133       114       150       127
162       142       148       155       101
135       149       156       129       138
105       159       136       105       104
163        .        113        .        150
;
proc varcomp data=aufg91 method=type1;
  class bulle;
  model milchfet = bulle;
run;
```

```
Variance Components Estimation Procedure
Class Level Information

Class     Levels    Values

BULLE          5    B1 B2 B3 B4 B5

Number of observations in data set = 60

NOTE: Due to missing values, only 58 observations can be used in this analysis.

Variance Components Estimation Procedure

Dependent Variable: MILCHFET

Source           DF        Type I SS      Type I MS  Expected Mean Square
BULLE             4    2795.59404389   698.89851097  Var(Error)+11.595 Var(BULLE)
Error            53   17596.68181818   332.01286449  Var(Error)
Corrected Total  57   20392.27586207

Variance Component        Estimate
Var(BULLE)             31.64218215
Var(Error)            332.01286449
```

Eine Übernahme der Schätzwerte in eine Ausgabe-Datei, um das Verhältnis der Varianzkomponenten oder den Intraklasskorrelationskoeffizienten zu berechnen, ist nicht möglich.

10 Die zweifaktorielle Varianzanalyse

Aufgabe 10.1: Für die drei Schichten eines Werkes sind für eine zufällig ausgewählte Woche folgende Produktionsmengen (in Tonnen) bekannt[37]

	Frühschicht	Tagesschicht	Spätschicht
Montag	8,1	8,8	8,0
Dienstag	9,3	9,4	8,5
Mittwoch	9,5	8,6	8,7
Donnerstag	8,2	8,3	8,7
Freitag	7,8	8,1	7,7

Gibt es hinsichtlich der Produktionsmengen bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ signifikante Unterschiede zwischen den Wochentagen und den Schichten?

Lösung:

Unter Verwendung der Tukey-Prozedur für beide Prüffaktoren könnte das SAS-Programm lauten:

```
data aufg101;
  input tag $10. frueh normal spaet;
  schicht='frueh '; menge=frueh; output;
  schicht='normal'; menge=normal; output;
  schicht='spaet '; menge=spaet; output;
cards;
Montag      8.1  8.8  8.0
Dienstag    9.3  9.4  8.5
Mittwoch    9.5  8.6  8.7
Donnerstag  8.2  8.3  8.7
Freitag     7.8  8.1  7.7
;
proc glm data=aufg101;
  class tag schicht;
  model menge = tag schicht;
  means tag;
  means schicht;
  means tag / tukey cldiff;
  means schicht / tukey cldiff;
run;
quit;
```

Das Ergebnis in der bekannten Form ist:

Mittelwerte und Standardabweichungen

Faktor		Mittelwert	Standardabweichung
Tag	Montag	8.30000000	0.43588989
	Dienstag	9.06666667	0.49328829
	Mittwoch	8.93333333	0.49328829
	Donnerstag	8.40000000	0.26457513
	Freitag	7.86666667	0.20816660
Schicht	frueh	8.58000000	0.76615925
	normal	8.64000000	0.50299105
	spaet	8.32000000	0.44944410

[37] Daten aus:
BOSCH, K.: Großes Lehrbuch der Statistik
R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1996, S. 504, Aufgabe 11.3

Varianztabelle

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;FG_1,FG_{Rest}}$	Pr > F	Test
Gesamt	14	4,457					
Faktor A (Tag)	4	2,877	0,719	4,46	3,838	0.0346	signifikant
Faktor B (Schicht)	2	0,289	0,145	0,90	4,459	0.4453	nicht signifikant
Rest	8	1,291	0,161				

Die mittlere Produktionsmenge der einzelnen Tage unterscheidet sich signifikant, die der drei Schichten dagegen nicht.

Tukey-Prozedur - Faktor A (Tage)

Grenzdifferenz: $HSD_{\alpha,a}$ = 1,133

```
                              Simultaneous              Simultaneous
                                 Lower     Difference      Upper
          TAG                 Confidence     Between    Confidence
       Comparison                Limit        Means        Limit

Montag     - Dienstag           -1.8997      -0.7667       0.3663
Montag     - Mittwoch           -1.7663      -0.6333       0.4997
Montag     - Donnerstag         -1.2330      -0.1000       1.0330
Montag     - Freitag            -0.6997       0.4333       1.5663

Dienstag   - Mittwoch           -0.9997       0.1333       1.2663
Dienstag   - Donnerstag         -0.4663       0.6667       1.7997
Dienstag   - Freitag             0.0670       1.2000       2.3330   ***

Mittwoch   - Donnerstag         -0.5997       0.5333       1.6663
Mittwoch   - Freitag            -0.0663       1.0667       2.1997

Donnerstag - Freitag            -0.5997       0.5333       1.6663
```

Montag	8.300	a	b
Dienstag	9.067	a	
Mittwoch	8.933	a	b
Donnerstag	8.400	a	b
Freitag	7.867		b

Die mittlere Produktionsmenge der Tage Dienstag und Freitag unterscheidet sich für die ausgewählte Woche signifikant.

Tukey-Prozedur - Faktor B (Schicht)

Wenn die Varianztabelle für den Faktor keine Signifikanz ausweist, braucht die Tukey-Prozedur nicht durchgeführt zu werden, weil auch sie keine signifikanten Unterschiede liefert.

Grenzdifferenz: $HSD_{\alpha,b}$ = 0,726

```
                    Simultaneous              Simultaneous
                       Lower     Difference      Upper
      SCHICHT       Confidence     Between    Confidence
     Comparison        Limit        Means        Limit

frueh  - normal       -0.7859      -0.0600       0.6659
frueh  - spaet        -0.4659       0.2600       0.9859

normal - spaet        -0.4059       0.3200       1.0459
```

Aufgabe 10.2: In einem Gewächshausversuch sollen die Düngung (unbehandelt, Stroh-, Stroh- und PO_4-, Stroh-, PO_4- und Kalkdüngung) und die chemische Behandlung (unbehandelt, N+O, CO_2-Gas, H_2CO_3) hinsichtlich des Ertrages einer Weizensorte verglichen werden, wobei keine spezielle Düngung oder Behandlung Bezugsbasis ist. Die je drei Töpfe (Wiederholungen) wurden zufällig angeordnet[38]. Festgelegt wird die Irrtumswahrscheinlichkeit α=0.05.

Düngung	Topf-Nr.	chemische Behandlung: unbehandelt	N+O	CO_2-Gas	H_2CO_3
unbehandelt	1	21,4	20,9	19,6	17,6
	2	21,2	20,3	18,8	16,6
	3	20,1	19,8	16,4	17,5
Stroh-	1	12,0	13,6	13,0	13,3
	2	14,2	13,3	13,7	14,0
	3	12,1	11,6	12,0	13,9
Stroh- und PO_4-düngung	1	13,5	14,0	12,9	12,4
	2	11,9	15,6	12,9	13,7
	3	13,4	13,8	13,1	13,0
Stroh-, PO_4- und Kalkdüngung	1	12,8	14,1	14,2	12,0
	2	13,8	13,2	13,6	14,6
	3	13,7	15,3	13,3	14,0

Lösung:

EXCEL

Für die nachstehende Excel-Tabelle wird die „zweifaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung" durchgeführt.

	A	B	C	D	E
1		unbehandelt	N+O	CO2-Gas	H2CO3
2	unbehandelt	21,4	20,9	19,6	17,6
3	unbehandelt	21,2	20,3	18,8	16,6
4	unbehandelt	20,1	19,8	16,4	17,5
5	Stroh	12,0	13,6	13,0	13,3
6	Stroh	14,2	13,3	13,7	14,0
7	Stroh	12,1	11,6	12,0	13,9
8	Stroh+PO4	13,5	14,0	12,9	12,4
9	Stroh+PO5	11,9	15,6	12,9	13,7
10	Stroh+PO6	13,4	13,8	13,1	13,0
11	Stroh+PO4+K	12,8	14,1	14,2	12,0
12	Stroh+PO4+K	13,8	13,2	13,6	14,6
13	Stroh+PO4+K	13,7	15,3	13,3	14,0

Das Ergebnis, von dem nur die Varianztabelle wiedergegeben werden soll, lautet:

Streuungsursache	*Quadratsummen (SS)*	*Freiheitsgrade (df)*	*Mittlere Quadratsumme (MS)*	*Prüfgröße (F)*	*P-Wert*	*kritischer F-Wert*
Stichprobe	306,242	3	102,081	124,299	1,03E-17	2,901
Spalten	9,171	3	3,057	3,722	2,11E-02	2,901
Wechselwirkung	25,462	9	2,829	3,445	4,54E-03	2,189
Fehler	26,280	32	0,821			
Gesamt	367,155	47				

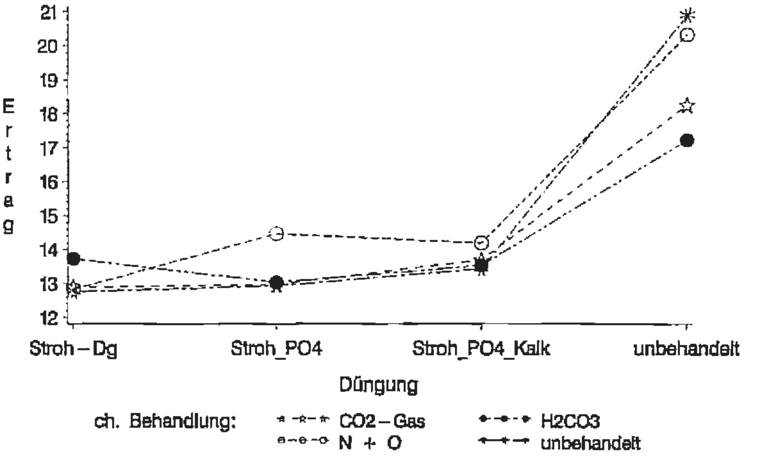
Die Wechselwirkung Düngung x Behandlung ist signifikant!

[38] Daten aus:
WEBER, E.: Grundriß der Biologischen Statistik, VEB Gustav Fischer Verlag, Jena, 9. Aufl., 1986, S. 292

Zur gleichen Varianztabelle führt das SAS-Programm

```
data aufg102;
  input duengung $15. nr b1-b4;
  behandlg='unbehandelt'; ertrag=b1; output;
  behandlg='N + O      '; ertrag=b2; output;
  behandlg='CO2-Gas    '; ertrag=b3; output;
  behandlg='H2CO3      '; ertrag=b4; output;
cards;
unbehandelt      1  21.4  20.9  19.6  17.6
unbehandelt      2  21.2  20.3  18.8  16.6
unbehandelt      3  20.1  19.8  16.4  17.5
Stroh-Dg         1  12.0  13.6  13.0  13.3
Stroh-Dg         2  14.2  13.3  13.7  14.0
Stroh-Dg         3  12.1  11.6  12.0  13.9
Stroh_PO4        1  13.5  14.0  12.9  12.4
Stroh_PO4        2  11.9  15.6  12.9  13.7
Stroh_PO4        3  13.4  13.8  13.1  13.0
Stroh_PO4_Kalk   1  12.8  14.1  14.2  12.0
Stroh_PO4_Kalk   2  13.8  13.2  13.6  14.6
Stroh_PO4_Kalk   3  13.7  15.3  13.3  14.0
;
proc glm data=aufg102;
  class duengung behandlg;
  model ertrag = duengung behandlg duengung*behandlg;
run;
quit;
```

Die Wechselwirkungen zwischen der Düngung „unbehandelt" und den chemischen Behandlungen belegt die Grafik[39]:



Für die multiplen Mittelwertvergleiche heißt das, daß

- die mittlere A (Düngung) -Wirkung nur durch Vergleich der AB- (Düngung x Behandlung) -Mittelwerte auf gleicher Stufe von B (Behandlung) und
- die mittlere B (Behandlung) -Wirkung nur durch Vergleich der AB- (Düngung x Behandlung) -Mittelwerte auf gleicher Stufe von A (Düngung)

eingeschätzt werden kann.

---

[39] SAS-Programm:

```
proc sort data=aufg102;  by behandlg duengung;
proc means data=aufg102;
  var ertrag;
  by behandlg duengung;
  output out=mean mean=m;
symbol1 c=black h=2.2 v==      l=20 i=join;
symbol2 c=black h=2.2 v=dot    l=14 i=join;
symbol3 c=black h=2.2 v=circle l=3  i=join;
symbol4 c=black h=2.2 v=:      l=8  i=join;
legend1 value=(h=1.4 f=swiss);
goptions htext=1.5 ftext=swiss;
proc gplot data =mean;
  label m  ='Ertrag' duengung='Düngung'  behandlg='ch. Behandlung:';
  plot m*duengung=behandlg  / legend=legend1 ;
run;  quit;
```

Da in der Aufgabenstellung ein Vergleich gegen einen Standard oder eine Kontrolle ausgeschlossen wurde, bietet sich die Tukey-Prozedur an.

Mit

- $a =$ 4 (Düngungsstufen)
- $b =$ 4 (Stufen „chemische Behandlung")
- $n =$ 3
- $a*b =$ 16
- $FG_{Rest} =$ 32
- $\alpha =$ 0,05
- $q_{1-\alpha;a*b,FG_{Rest}} = q_{0,95;8,32} = 4.581$ (SAS-Funktion `probmc("RANGE",.,0.95,32,8)` oder Tab. 8.6)
- $s_{Rest} = \sqrt{s^2_{Rest}} = \sqrt{0,821} = 0,906$

ist die Grenzdifferenz der Tukey-Prozedur des zweifaktoriellen Varianzanalysemodells mit festen Effekten (Modell I) einer vollständigen Kreuzklassifikation mit Wiederholung

$$HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ auf gleicher Stufe von B}} = HSD_{\alpha;ab}^{\overline{AB}\text{ auf gleicher Stufe von A}} = q_{1-\alpha;ab,FG_{Rest}} * s_{Rest} / \sqrt{n} = 4,581*0,906/\sqrt{3} = 2,396 \quad .$$

Die (1-α)-Konfidenzintervalle und Testergebnisse lauten

- für den Vergleich der mittleren Wirkung der Stufen des Faktors „chemische Behandlung" [auf gleicher Stufe des Faktors „Düngung"]:

Düngung	Behandlung	$\overline{AB}$	Beh.	$\overline{AB}$	Diff.	(1-α)-KI uG	(1-α)-KI oG	Test
unbehandelt	unbehandelt	20,900	N + O	20,333	0,567	-1,829	2,963	nicht signifikant
			CO2-Gas	18,267	2,633	0,237	5,029	signifikant
			H2CO3	17,233	3,667	1,271	6,063	signifikant
	N + O	20,333	CO2-Gas	18,267	2,067	-0,329	4,463	nicht signifikant
			H2CO3	17,233	3,100	0,704	5,496	signifikant
	CO2-Gas	18,267	H2CO3	17,233	1,033	-1,363	3,429	nicht signifikant
Stroh-Dg	unbehandelt	12,767	N + O	12,833	-0,067	-2,463	2,329	nicht signifikant
			CO2-Gas	12,900	-0,133	-2,529	2,263	nicht signifikant
			H2CO3	13,733	-0,967	-3,363	1,429	nicht signifikant
	N + O	12,833	CO2-Gas	12,900	-0,067	-2,463	2,329	nicht signifikant
			H2CO3	13,733	-0,900	-3,296	1,496	nicht signifikant
	CO2-Gas	12,900	H2CO3	13,733	-0,833	-3,229	1,563	nicht signifikant
Stroh_PO4	unbehandelt	12,933	N + O	14,467	-1,533	-3,929	0,863	nicht signifikant
			CO2-Gas	12,967	-0,033	-2,429	2,363	nicht signifikant
			H2CO3	13,033	-0,100	-2,496	2,296	nicht signifikant
	N + O	14,467	CO2-Gas	12,967	1,500	-0,896	3,896	nicht signifikant
			H2CO3	13,033	1,433	-0,963	3,829	nicht signifikant
	CO2-Gas	12,967	H2CO3	13,033	-0,067	-2,463	2,329	nicht signifikant
Stroh_PO4_Kalk	unbehandelt	13,433	N + O	14,200	-0,767	-3,163	1,629	nicht signifikant
			CO2-Gas	13,700	-0,267	-2,663	2,129	nicht signifikant
			H2CO3	13,533	-0,100	-2,496	2,296	nicht signifikant
	N + O	14,200	CO2-Gas	13,700	0,500	-1,896	2,896	nicht signifikant
			H2CO3	13,533	0,667	-1,729	3,063	nicht signifikant
	CO2-Gas	13,700	H2CO3	13,533	0,167	-2,229	2,563	nicht signifikant

- für den Vergleich der mittleren Wirkung der Stufen des Faktors „Düngung" [auf gleicher Stufe des Faktors „chemische Behandlung"]:

Behandlung	Düngung	$\overline{AB}$	Düngung	$\overline{AB}$	Diff.	(1-α)-KI uG	oG	Test
unbehandelt	unbehandelt	20,900	Stroh-Dg	12,767	8,133	5,737	10,529	signifikant
			Stroh_PO4	12,933	7,967	5,571	10,363	signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	13,433	7,467	5,071	9,863	signifikant
unbehandelt	Stroh-Dg	12,767	Stroh_PO4	12,933	-0,166	-2,562	2,230	nicht signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	13,433	-0,666	-3,062	1,730	nicht signifikant
unbehandelt	Stroh_PO4	12,933	Stroh_PO4_Kalk	13,433	-0,500	-2,896	1,896	nicht signifikant
N + O	unbehandelt	20,333	Stroh-Dg	12,833	7,500	5,104	9,896	signifikant
			Stroh_PO4	14,467	5,866	3,470	8,262	signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	14,200	6,133	3,737	8,529	signifikant
N + O	Stroh-Dg	12,833	Stroh_PO4	14,467	-1,634	-4,030	0,762	nicht signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	14,200	-1,367	-3,763	1,029	nicht signifikant
N + O	Stroh_PO4	14,467	Stroh_PO4_Kalk	14,200	0,267	-2,129	2,663	nicht signifikant
CO2-Gas	unbehandelt	18,267	Stroh-Dg	12,900	5,367	2,971	7,763	signifikant
			Stroh_PO4	12,967	5,300	2,904	7,696	signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	13,700	4,567	2,171	6,963	signifikant
CO2-Gas	Stroh-Dg	12,900	Stroh_PO4	12,967	-0,067	-2,463	2,329	nicht signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	13,700	-0,800	-3,196	1,596	nicht signifikant
CO2-Gas	Stroh_PO4	12,967	Stroh_PO4_Kalk	13,700	-0,733	-3,129	1,663	nicht signifikant
H2CO3	unbehandelt	17,233	Stroh-Dg	13,733	3,500	1,104	5,896	signifikant
			Stroh_PO4	13,033	4,200	1,804	6,596	signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	13,533	3,700	1,304	6,096	signifikant
H2CO3	Stroh-Dg	13,733	Stroh_PO4	13,033	0,700	-1,696	3,096	nicht signifikant
			Stroh_PO4_Kalk	13,533	0,200	-2,196	2,596	nicht signifikant
H2CO3	Stroh_PO4	13,033	Stroh_PO4_Kalk	13,533	-0,500	-2,896	1,896	nicht signifikant

Aufgabe 10.3: In einem Gewächshausversuch sollen die Düngung (unbehandelt, Stroh-, Stroh- und PO_4-, Stroh-, PO_4- und Kalkdüngung) und die chemische Behandlung (unbehandelt, N+O, CO_2-Gas, H_2CO_3) hinsichtlich des Ertrages einer Weizensorte dahingehend verglichen werden, daß die Stufen beider Faktoren zufällig ausgewählt wurden. Die Daten sind die der Aufgabe 10.2.

Lösung:

Papier und Bleistift

Mit

Faktor A: Düngung	$a = 4$
Faktor B: chemische Behandlung	$b = 4$
Wiederholung	$n = 3$
Irrtumswahrscheinlichkeit	$\alpha = 0{,}05$

und aus der Varianztabelle (s. Aufgabe 10.2)

$MQ_A = 102{,}081$
$MQ_B = 3{,}057$
$MQ_{AxB} = 2{,}829$
$MQ_{Rest} = 0{,}821$

ergibt sich für die Schätzwerte der Varianzkomponenten, die alle signifikant von Null verschieden sind (s. F-Werte bzw. Überschreitungswahrscheinlichkeiten der Varianztabelle)

$$s^2_{Rest} = MQ_{Rest} = 0{,}821$$

$$s^2_{AxB} = \frac{MQ_{AxB} - MQ_{Rest}}{n} = \frac{2{,}829 - 0{,}821}{3} = 0{,}669$$

$$s^2_B = \frac{MQ_B - MQ_{AxB}}{a\,n} = \frac{3{,}057 - 2{,}829}{4*3} = 0{,}019$$

$$s^2_A = \frac{MQ_A - MQ_{AxB}}{b\,n} = \frac{102{,}081 - 2{,}829}{4*3} = 8{,}271 \quad .$$

Das Verhältnis der Varianzkoeffizienten ist $s^2_{Rest} : s^2_A : s^2_B : s^2_{AxB} \approx 1 : 10 : 0{,}02 : 0{,}8$.
Die größte Variabilität besteht zwischen den Düngungsstufen (Faktor A). Hingegen ist die Variabilität zwischen den chemischen Behandlungen (Faktor B) im Vergleich zur Restvarianz gering.

SAS

```
proc varcomp data=aufg102
             method=mivque0;
  class duengung behandlg;
  model ertrag=duengung behandlg duengung*behandlg;
run; quit;
```

Die geschätzten Varianzkomponenten sind (SAS-Output gekürzt):

```
                                    Estimate
Variance Component                    ERTRAG

Var(DUENGUNG)                     8.27097222
Var(BEHANDLG)                     0.01898148
Var(DUENGUNG*BEHANDLG)            0.66928241
Var(Error)                        0.82125000
```

Aufgabe 10.4: Bei der Mastleistungsprüfung (1952) mit zwei zufällig ausgewählten Ebern wird die Anzahl der Masttage der Nachkommen der Paarungen mit jeweils drei zufällig ausgewählten Sauen ermittelt.[40] Die Varianzkomponenten sind zu berechnen. Es ist zu testen, ob sie sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ signifikant von Null unterscheiden.

Eber	A_1			A_2		
Sauen	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{21}	B_{22}	B_{23}
Masttage	93	107	109	89	87	81
	89	99	107	102	91	83
	97		94	104	82	85
	105		106	97		91

Lösung:

Papier und Bleistift

a = 2 b = 3 N = 21

Berechnen von Summen:

	Eber	A_1			A_2		
	Sauen	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{21}	B_{22}	B_{23}
	Masttage	93	107	109	89	87	81
		89	99	107	102	91	83
		97		94	104	82	85
		105		106	97		91
n_{ij}		4	2	4	4	3	4
$\sum_{j=1}^{b} n_{ij}$		10			11		
$\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}$		384	206	416	392	260	340
$\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}$		1006			992		

$$Sgl = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}\right)^2 = (1006+992)^2/21 = 190095{,}42$$

$$SQ_{gesamt} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - Sgl = (93^2+89^2+\ldots+91^2) - 190095{,}42 = 1640{,}58$$

$$SQ_A = \sum_{i=1}^{a}\frac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}\right)^2}{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}} - Sgl = 1006^2/10 + 992^2/11 - 190095{,}42 = 568{,}54$$

$$SQ_{B(A)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}\right)^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^{a}\frac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}\right)^2}{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}} = [384^2/4+206^2/2+\ldots+340^2/4] - (1006^2/10 + 992^2/11)$$

$$= 531{,}37$$

$$SQ_{Rest} = SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_{B(A)} = 1640{,}58 - 568{,}54 - 531{,}37 = 540{,}67$$

[40] RASCH, D., G. ENDERLEIN und G. HERRENDÖRFER: Biometrie. Verfahren, Tabellen, angewandte Statistik VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin, 1973, Beispiel 7.7 S. 158 f

Lösungen

$FG_{gesamt} = N - 1 \quad = 21 - 1 \quad = 20$

$FG_A \quad = a - 1 \quad = 2 - 1 \quad = 1$

$FG_{B(A)} \quad = a * b - a \quad = 2 * 3 - 2 = 4$

$FG_{Rest} \quad = N - a * b \quad = 21 - 2 * 3 = 15$

$$MQ_{gesamt} = s^2 = \frac{SQ_{gesamt}}{FG_{gesamt}} = 1640{,}58 / 21 = 78{,}12$$

$$MQ_A = s_A^2 = \frac{SQ_A}{FG_A} = 568{,}54 / 1 = 568{,}54$$

$$MQ_{B(A)} = s_{B(A)}^2 = \frac{SQ_{B(A)}}{FG_{B(A)}} = 531{,}37 / 4 = 132{,}84$$

$$MQ_{Rest} = s_{Rest}^2 = \frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}} = 540{,}67 / 15 = 36{,}04$$

$$F_A = \frac{MQ_A}{MQ_{B(A)}} = 568{,}54 / 132{,}84 = 4{,}28$$

$$F_{B(A)} = \frac{MQ_{B(A)}}{MQ_{Rest}} = 132{,}84 / 36{,}04 = 3{,}69$$

$$k_1 = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{a} b_i\right) - a}\left(N - \sum_{i=1}^{a}\frac{\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}^2}{\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}}\right) = \frac{1}{a*b-a}\left(N - \sum_{i=1}^{a}\frac{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2}{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}}\right) = \frac{1}{2*3-2}\left(21 - \left(\frac{4^2+2^2+4^2}{10} + \frac{4^2+3^2+4^2}{11}\right)\right) = 3{,}42$$

$$k_2 = \frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}^2\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}} - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}} - \frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{2-1}\left[\left(4^2+2^2+4^2\right)\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{21}\right) + \left(4^2+3^2+4^2\right)\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{21}\right)\right] = 3{,}66$$

$$k_3 = \frac{1}{a-1}\left(N - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\right)^2\right) = \frac{1}{a-1}\left(N - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\right)^2\right) = \frac{1}{2-1}\left[21 - \frac{1}{21}\left(10^2 + 11^2\right)\right] = 10{,}48$$

Varianzursache	FG	SQ	MQ	F	$F_{1-\alpha;FG_1,FG_2}$	Test
Gesamt	21	1640,58				
Faktor A (Eber)	1	568,54	568,54	4,28	7,709	nicht signifikant
Faktor B(A) (Sauen)	4	531,37	132,84	3,69	3,056	signifikant
Rest	15	540,67	36,04			

Die Schätzwerte für die Varianzkomponenten sind:

$\hat{\sigma}^2 = s_{Rest}^2 =$ 36,04

$\hat{\sigma}_{B(A)}^2 = s_{B(A)}^2 =$ (132,84 - 36,04) / 3,42 = 28,30

$\hat{\sigma}_A^2 = s_A^2 =$ [568,54-(3,66/3,42)*132,84-(1-(3,66/3,42))*36,04] / 10,48 = 40,93 ,

wobei die Varianzkomponente der Eber s^2_A als nicht von Null verschieden [bei einem Freiheitsgrad!] anzusehen ist, obwohl bei einer Gesamtvarianz von $s^2_{Gesamt} = s^2_A + s^2_{B(A)} + s^2_{Rest}$ = 40,93 + 28,30 + 36,04 = 105,27 = 100% etwa 39% der Varianz auf die Eber, etwa 27% auf die Sauen einschließlich der Wechselwirkungen Eber x Sauen und etwa 34% der Gesamtvarianz hinsichtlich der Masttage auf die Nachkommen entfallen.

SAS

```
data aufg104;
  input b11 b12 b13 b21 b22 b23;
  eber=1; sau=1; mast=b11; output;
  eber=1; sau=2; mast=b12; output;
  eber=1; sau=3; mast=b13; output;
  eber=2; sau=1; mast=b21; output;
  eber=2; sau=2; mast=b22; output;
  eber=2; sau=3; mast=b23; output;
cards;
 93  107   109   89   87   81
 89   99   107  102   91   83
 97    .    94  104   82   85
105    .   106   97    .   91
;
proc varcomp data=aufg104
             method=type1 [mivque0 | reml];
  class eber sau;
  model mast=eber sau(eber);
run; quit;
```

die [ ]-Klammer steht dafür, daß alle drei Methoden „ausprobiert“ werden sollen

Die Ergebnisse für die einzelnen Methoden sind:

	method =		
Varianzkomponente	type1	mivque0	reml
Eber	40.93353750	41.17398189	46.89603487
Sau(Eber)	28.31855792	27.46206328	26.17987207
Fehler	36.04444444	36.66079274	35.76508216

Die Schätzwerte der Varianzkomponenten der ersten Spalte entsprechen der „traditionellen“ Handrechnung (s. o.), die in der letzten Spalte sind am „wahrscheinlichsten“; sie wurden mit Hilfe der eingeschränkten Maximum Likelihood Schätzung berechnet.

Tabellenverweis

Berichte aus der Biologischen Bundesanstalt für Land- und Forstwirtschaft
erscheinen seit 1995 in zwangloser Folge. Es liegen vor:

Heft 2, 1995: Liste der zugelassenen Pflanzenschutzmittel (Stand: 1. Januar 1995). Bearb. von Dr. Achim Holzmann u. Andreas Spinti, 63 S.

Heft 3, 1995: Rechtliche Regelungen der Europäischen Union zur Prüfung und Zulassung von Pflanzenschutzmitteln und Wirkstoffen (Richtlinien, Verordnungen, Entscheidungen und Protokolle) (Stand: 1. Juni 1995). Bearb. von Dr. Jörg-Rainer Lundehn, 233 S.

Heft 4, 1995: Verzeichnis der Wirkstoffe in zugelassenen Pflanzenschutzmitteln (ehemals Merkblatt Nr. 20), (Stand: November 1994). Bearbeitet von Dr. Günter Hoffmann, 86 S.

Heft 5, 1995: Spritz- und Sprühgeräte für Flächenkulturen. Auszug aus der BESCHREIBENDEN PFLANZENSCHUTZ- LISTE -Teil Geräte-. Bearbeitet von Dr.-Ing. Heinz Ganzelmeier, Sabine Gebauer, Hans-Joachim Wehmann und Siegfried Rietz, 170 S.

Heft 6, 1995: Information Exchange and Prior Informed Consent (PIC) Procedure in the Export and Import of Pesticides in the Framework of the FAO Code of Conduct. Bearbeitet von Dr. Achim Holzmann, 111 S.

Heft 7, 1995: Workshop Integrated Pest Management. November 2nd 1995, Kleinmachnow. Bearbeitet von Dr. Holger Beer, 39 S.

Heft 8, 1995: Art und Menge der in der Bundesrepublik Deutschland abgegebenen und der exportierten Wirkstoffe in Pflanzenschutzmitteln (1987-1994). Ergebnisse aus dem Meldeverfahren nach § 19 des Pflanzenschutzgesetzes. Bearbeitet von Dr. Hans-Hermann Schmidt, Dr. Achim Holzmann und Edelgard Adam, 65 S.

Heft 9, 1995: Arbeitsschutz und Arbeitssicherheit im öffentlichen Dienst (Stand: Juni 1995). Dirk Altewein, 16 S.

Heft 10, 1996: Zur Umsetzung biometrischer Verfahren in SAS mit Beispielen aus dem Pflanzenschutz. Dr. Eckard Moll, 185 S.

Heft 11, 1996: Liste der zugelassenen Pflanzenschutzmittel (Stand: 1. Januar 1996). Bearb. von Dr. Achim Holzmann u. Andreas Spinti, 63 S.

Heft 12, 1996: Methodische Anleitung zur Bewertung der partiellen Resistenz und die SAS Anwendung RESI. Eckard Moll, 60 S.

Heft 13, 1996: Saatgutbehandlung von Getreide und Beschreibende Liste - Beizgeräte (Stand: Dezember 1995). Bearbeitet von Dr. Helmut Ehle, Dr. Günter Menschel, Dr. Wolfgang Radtke, Siegfried Rietz, Friedrich-Otto Ripke, 48 S.

Heft 14, 1996: Die SAS-Anwendung FELD_VA-konstruktion des Lageplanes und der varianzanalytischen Auswertung ein- bis dreifaktorieller Feldversuche. Dr. Eckard Moll, 43 S.

Heft 15, 1996: Dokumentation der Forschungsvorhaben - Forschungsaufgaben der BBA unter besonderer Berücksichtigung ihrer „Drittmittelforschung" - laufende Vorhaben der BBA, Stand: Januar 1996. Dr. Holger Beer, Dr. Heinrich Brammeier, 145 S.

Heft 16, 1996: Assessing Volatilization of Pesticides: A comparison of 18 Laboratory Methods and a Field Method. Bearbeitet von Ulrike Walter, Dr. Matthias Frost, Garnet Krasel, Prof. Dr. Wilfried Pestemer, 44 S.

Heft 17, 1996: Fachgespräch zur Statistik in der Ökotoxikologie, 26. - 27. September 1995, Braunschweig. Bearbeitet von Dr. Gerd Joermann, Herbert Köpp, Dr. Christine Kula, 34 S.

Heft 18, 1996: Toleranz von Pflanzen gegen Stress- das Stiefkind der phytopathologischen Forschungen? Petra Seidel, 28 S.

Heft 19, 1996: Zuständigkeiten bei der Prüfung und Zulassung von Pflanzenschutzmitteln und bei der EU-Wirkstoffprüfung (Stand: September 1996). Bearbeitet von Edelgard Adam, 47 S.

Heft 20, 1996: Rechtliche Regelungen der Europäischen Union zur Prüfung und Zulassung von Pflanzenschutzmitteln und Wirkstoffen. (Richtlinien, Verordnungen, Entscheidungen und Protokolle), Stand: 1. September 1996. 2. Auflage. Bearbeitet von Dr. Jörg-Rainer Lundehn, 347 S.

Heft 21, 1996: Arbeitsschutz und Arbeitssicherheit im öffentlichen Dienst (Stand: August 1996). Dirk Altewein, 21 S.

Heft 22, 1996: Strategiepapier „Lückenindikation" -Situation und Lösungen-. Dr. Waltraud Pallutt, Dr. Karsten Hohgardt, 35 S.

Heft 23, 1997: Einführung in die Biometrie unter Berücksichtigung der Software SAS, Teil 1: Grundbegriffe, beschreibende Statistik und Vergleich zweier Mittelwerte. Dr. Eckard Moll, 111 S.

Heft 24, 1997: Liste der zugelassenen Pflanzenschutzmittel (Stand: 1. Januar 1997). Bearb. von Dr. Achim Holzmann u. Andreas Spinti, 64 S.

Heft 25, 1997: Synopsis of Testing Plant Protection Equipment in the Federal Republic of Germany. Bearbeitet von Siegfried Rietz, 170 S.

Heft 26, 1997: Zuständigkeiten bei der Prüfung und Zulassung von Pflanzenschutzmitteln und bei der EU-Wirkstoffprüfung. (Stand: März 1997). Bearbeitet von Edelgard Adam, 53 S.

Heft 27, 1997: Toleranz von Pflanzen gegenüber biotischen und abiotischen Stressoren. Bearbeitet von Dr. Heinz-Wilhelm Dehne und Dr. Petra Seidel, 31 S.

Heft 28, 1997: Toleranzinduktion durch Resistenzinduktoren und Pflanzenstärkungsmittel - Nachweis und Bewertung. Petra Seidel, Marguerite Dètrie und Sigrid Heise, 132 S.

Heft 29, 1997: Standardized Bioassay for the Determination of ED_{10}- (NOEL) and ED_{50}_values for Herbicides and Selected Following Crops in Soil. Wilfried Pestemer und Petra Pucelik-Günther, 26 S.

Heft 30, 1997: 44. Kongreß des Internationalen Hopfenbaubüros und 42. Kongreß der Europäischen Union des Hopfenhandels. Bearbeitet von Dr. Erdmann Bode, 147 S.