

Ranking technisch effizienter Prozesse im Rahmen der Data Envelopment Analysis (DEA) an Fallbeispielen der Molke- reiwirtschaft

Dr. B. Müller

Institut für Ökonomie der Ernährungswirtschaft der Bundesanstalt für Milchforschung,
Postfach 60 69, 24121 Kiel

1. Problemstellung

Die DEA ermöglicht die Beurteilung der technischen Effizienz von Entscheidungseinheiten (EE) in Molkereien auch in Fällen, in denen ein einfacher Vergleich von Kosten und Erlösen nicht sinnvoll ist, weil die Aggregation von Inputs und Outputs der EE zu jeweils einer monetären Größe nicht möglich oder nicht angemessen erscheint (5), (6), (12), (13), (17), (19). Durch die DEA wird aus den Inputs und Outputs der EE die effektive Produktionsfunktion als Teil der Technik geschätzt. Für Entscheidungseinheiten, die nicht auf dem Rand der Technik liegen, kann das Maß der Ineffizienz ermittelt werden. Eine unterschiedliche Vorteilhaftigkeit der effizienten EE kann dagegen mit dieser Methode nicht festgestellt werden.

Will man die DEA-Ergebnisse für Benchmarking- oder Best-Practice-Überlegungen verwenden, so kann dies zu Problemen führen. Diese werden verstärkt, weil die aus den EE-Daten geschätzte effiziente Produktionsfunktion die tatsächliche effiziente Produktionsfunktion unterschätzt (3), was die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass auch tatsächlich nichteffiziente EE als effizient ausgewiesen werden. Insbesondere, wenn man variable Skalenerträge und konvexe Technik unterstellt, werden relativ viele EE als effizient ausgewiesen (17). Kommt noch das Problem relativ vieler Inputs und Outputs sowie relativ weniger EE (Dimensionsproblem) hinzu, kann dies im Einzelfall dazu führen, dass man nur für sehr wenige EE Ineffizienz und damit einen möglichen Lerneffekt nachweisen kann.

Es besteht deshalb Bedarf für eine Methodik, die es ermöglicht, weitere Abstufungen der relativen Vorteilhaftigkeit zwischen den im ersten Schritt als effizient ermittelten EE aufzuzeigen, um hieraus zusätzliche Lerneffekte zu generieren.

2. Lösungsidee

Für Unternehmen, deren Produktionsfunktion nur jeweils einen Input und Output berücksichtigt, kann man über das Verhältnis von Input- zur Outputmenge eine vollständige Ordnung der EE bezüglich deren Effizienz erreichen. Für Molkereien mit ihrem gefächerten Produktionsprogramm und den vielen unterschiedlichen Produktionsfaktoren ergeben sich bei der Beschreibung der zu realisierenden Produktion durch die Produktionsfunktion jedoch Punkte im Raum einer Dimension höher als zwei. Für solche Räume ist eine natürliche Ordnung nicht mehr gegeben, d. h. für jeweils zwei unterschiedliche EE kann nicht in jedem Fall festgestellt werden, welche „besser“ im Sinne eines vorgegebenen Kriteriums ist. Deshalb kann innerhalb der Menge der effizienten EE auf diesem Wege nicht weiter differenziert werden.

Ein entsprechendes strukturelles Problem tritt bei Fragen der Entscheidung unter mehrfacher Zielsetzung (Multiple Criteria Decision Making (MCDM)) auf. Ist die Zielfunktion eindimensional, so kann für jeweils zwei unterschiedliche Alternativen im nichtdegenerierten Fall (also bei unterschiedlichen Zielfunktionswerten) eindeutig festgestellt werden, welche besser ist. Ist die Zielfunktion mehrdimensional, so kann zwischen Elementen der Menge der paretooptimalen Alternativen keine Abstufung sichtbar gemacht werden (4), (9), (25), (26). Wegen der strukturellen Gleichartigkeit der Probleme bietet es sich an, auf dem Gebiet des MCDM gewonnene Erkenntnisse auf die DEA zu übertragen (1), (2), (11), (14), (15), (21), (22).

Der mögliche Lösungsweg ist bereits durch die Problemanalyse vorgegeben. Der Grund für die nur partielle natürliche Ordnung und damit die mangelnde Vergleichbarkeit einzelner EE im Rahmen der DEA bzw. einzelner Lösungsalternativen im Rahmen des MCDM liegt in der mehrdimensionalen Struktur des jeweiligen Problems. Demzufolge liegt die Lösung in einer Projektion auf einen zweidimensionalen Raum. Dies geschieht im Rahmen des MCDM durch das Compromise-Programming (4), (25), (26). Die unterschiedlichen Dimensionen werden gewichtet und die Ergebnisse addiert. Es entsteht eine eindimensionale Zielfunktion bzw. jeweils eindimensionale Inputs und Outputs, für die ein vollständiges Ranking außer in degenerierten Fällen natürlich gegeben ist.

Als Problem verbleibt die Auswahl der Gewichtungsfaktoren. Im MCDM wird oft angenommen, dass der Entscheider eine solche Gewichtung aus seiner Interessenslage heraus kenne. Diese Annahme ist im Rahmen der DEA nicht zielführend, denn falls der Entscheider Inputs und Outputs gemäss seiner Interessenslage eindeutig gewichten könnte, sollte er auf eine mehrdimensionale Untersuchung im Rahmen der DEA verzichten und gleich das Verhältnis von jeweils eindimensionalem Input und Output bilden. Ein zweiter Weg der Gewichtung im Rahmen des MCDM baut auf der Beobachtung auf, dass Aggregationsergebnisse hierbei von den Einheiten abhängen, in denen die einzelnen Dimensionen gemessen werden. Wird z. B. ein Inputfaktor in Kilogramm anstelle von Tonnen gemessen, so ist sein Einfluss in der aggregierten Darstellung ceteris paribus Tausendmal so groß. Um solche nicht zielführenden Verzerrungen zu vermeiden, bietet es sich an, als Gewichtungsfaktoren eine Art von Normierung vorzusehen, in dem die Gewichtungsfaktoren umgekehrt proportional zu der jeweils größten Ausprägung eines Messwertes in der jeweiligen Dimension gewählt werden.

Diese Anregung aus dem MCDM wird hier mit der Beobachtung verknüpft, dass Aussagen über die technische Effizienz mit Hilfe der DEA zu Aussagen über die allokativen und dann ökonomische Effizienz erweitert werden können, wenn alle Input- und Outputfaktoren mit Preisen bewertet werden, wobei dann das Gebiet der DEA verlassen wird. Allerdings kann dies die Ergebnisse einer DEA nicht immer ersetzen, weil zum einen für Inputs und Outputs keine geeigneten (Markt) Preise zur Verfügung stehen können, zum anderen für Best-Practice- und Benchmarking-Untersuchungen die unterschiedlichen Preisvektoren für die einzelnen EE zu berücksichtigen wären, was Aussagen über ihre relativen Vorteilhaftigkeiten und die daraus ableitbaren Lerneffekte zusätzlich erschweren würde.

Deshalb wird hier zur Bewertung der Inputs und Outputs ein Parametersystem vorgeschlagen, dass zum einen die zuvor erwähnte Normierungsfunktion erfüllt, zum anderen unter speziellen Umständen mit Schattenpreisen für Inputs und Outputs im Rahmen einer plausiblen Entscheidungssituation identifiziert werden kann.

Trotz dieser Gründe, die man für die Sinnhaftigkeit einer solchen Bewertung angeben kann, bleibt festzuhalten, dass es sich bei dem Verfahren um eine Heuristik handelt, deren Ergebnisse hilfreich sein können, die aber nicht zwingend im Sinne eines logisch abgeleiteten Ergebnisses auf Basis genau definierter Annahmen sind.

3. Algorithmus

Die DEA misst die Effizienz von EE, deren Wirkungen durch jeweils einen Input/Outputvektor beschrieben wird. Die Voraussetzungen fasst die Definition 1 zusammen.

Definition 1: Voraussetzungen einer Effizienzmessung mittels DEA bei konvexer Technik

- Die relevanten Wirkungen aller EE \bar{p} ($\bar{p} = 1, \dots, \bar{P}$) lassen sich auf Basis gemeinsamer homogener Inputfaktoren i ($i = 1, \dots, I$) und Outputfaktoren j ($j = 1, \dots, J$) darstellen.
- Alle EE nutzen eine gemeinsame Technik $T \subset \mathbb{R}^{I+J}$.
- T ist konvex.
- $\bar{p} \in (1, \dots, \bar{P})$ ist effizient $(X_{\bar{p}}, Y_{\bar{p}})$ liegt auf dem Rand von T .
- T wird durch die konvexe Hülle $\text{Con} \left(\left\{ (X_{\bar{p}}, Y_{\bar{p}}) \right\}_{\bar{p}=1}^{\bar{P}} \right)$ geschätzt.

(Vergleiche (17), Def. 4)

Es ist beabsichtigt, zwischen diesen effizienten EE weiter zu differenzieren. Deshalb müssen in einem ersten Schritt die effizienten EE bestimmt werden. Dies leistet die Übersicht 1.

$$\left(\left\{ (X_{\bar{p}}, Y_{\bar{p}}) \right\}_{\bar{p}=1}^{\bar{P}} \right)$$

Übersicht 1: Test auf Effizienz

Seien die Bedingungen der Definition 1 gegeben, sei $\bar{p} \in (1, \dots, \bar{P})$ beliebig. Man löst das lineare Optimierungsproblem:

$$a) \quad \sum_{i=1}^I z_i^{\bar{p}} + \sum_{j=1}^J z_{I+j}^{\bar{p}} =: \bar{E}_{\bar{p}} \quad \max$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{p=1}^{\bar{P}} \delta_p^{\bar{p}} \cdot x_i^p + z_i^{\bar{p}} = x_i^{\bar{p}}$$

$$c) \quad \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{\bar{P}} \delta_p^{\bar{p}} \cdot y_j^p - z_{I+j}^{\bar{p}} = y_j^{\bar{p}}$$

$$d) \quad \sum_{p=1}^{\bar{P}} \delta_p^{\bar{p}} = 1$$

$$e) \quad \sum_{p=1}^{\bar{P}} \delta_p^{\bar{p}} \geq 0; \quad \sum_{k=1}^{I+J} z_k^{\bar{p}} \geq 0$$

Es gilt:

$$f) \bigwedge_{\bar{p}=1}^{\bar{P}} \bar{E}_{\bar{p}} = 0 \Leftrightarrow \text{ist effizient.}$$

(Vergleiche (17), Definition 6).

OBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) seien $\bar{p} \in 1, \dots, \bar{P}$ die effizienten EE. Um diese effizienten EE durch Gewichtung der Input- und Outputvariablen vergleichbar zu machen, ist es notwendig, die strukturellen Unterschiede zwischen Inputs (Minimierung erwünscht) und Outputs (Maximierung erwünscht) zu beseitigen, wenn man die Ideen des MCDM verwenden möchte. Dies geschieht durch die Übersicht 2.

Übersicht 2: Umformung der Input – Output – Vektoren der effizienten EE

Seien $(x_p, y_p)_{p=1}^P$ die Input – Output – Vektoren der effizienten EE gemäß Übersicht 1 mit:

$$a) \bigwedge_{p=1}^P x_p = (x_1^p, \dots, x_I^p)$$

$$b) \bigwedge_{p=1}^P y_p = (y_1^p, \dots, y_J^p)$$

Man definiert:

$$c) \bigwedge_{i=1}^I x_i \max := \text{MAX} \left(\left(x_i^p \right)_{p=1}^P \right) \quad \bar{p}$$

$$d) \bigwedge_{p=1}^P \bigwedge_{k=1}^I w_k^p := x_k \max - x_k^p$$

$$e) \bigwedge_{p=1}^P \bigwedge_{k=I+1}^K w_k^p := y_{k-I}^p$$

Durch diese Umformung wird erreicht, dass nunmehr für alle w_k^p eine Maximierung erwünscht ist. Die gesuchten Gewichte für die Inputs und Outputs können gemäß den Normierungsüberlegungen des MCDM bestimmt werden. Dies geschieht in der Übersicht 3.

Übersicht 3: Bestimmung von Input – und Outputgewichten

Seien (w_p) die Input – Output – Vektoren der effizienten EE gemäß Übersicht 2 mit:

$$a) \bigwedge_{p=1}^P w_p := (w_1^p, \dots, w_K^p)$$

Man definiert:

$$b) \hat{\wedge}_{k=1}^K w_k \max := \text{MAX} \left(\left(w_k^p \right)_{p=1}^P \right)$$

$$c) \hat{\wedge}_{k=1}^K w_k \min := \text{MIN} \left(\left(w_k^p \right)_{p=1}^P \right)$$

$$d) \hat{\wedge}_{k=1}^K g_k := (w_k \max - w_k \min) \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k \min}{w_k \max - w_k \min} \right) \right]^{-1}$$

Mit Hilfe der so ermittelten Gewichte g_k kann dann ein zusätzliches Vergleichsmaß E_p für die einzelnen effizienten EEs bestimmt werden. Dies geschieht in der Übersicht 4.

Übersicht 4: Ermittlung eines Vergleichsmaßes für effiziente EE

Seien $p=1, \dots, P$ die effizienten EE gemäß Übersicht 1, $(g_k)_{k=1}^K$ die Gewichte gemäß Übersicht 3. Dann wird ein Vergleichsmaß E_p für die p definiert durch:

$$a) E_p := \frac{\sum_{j=1}^J g_{I+j} \cdot y_j^p}{\sum_{i=1}^I g_i \cdot x_i^p}$$

Die Abbildung 1 fasst die Vorgehensweise zusammen.

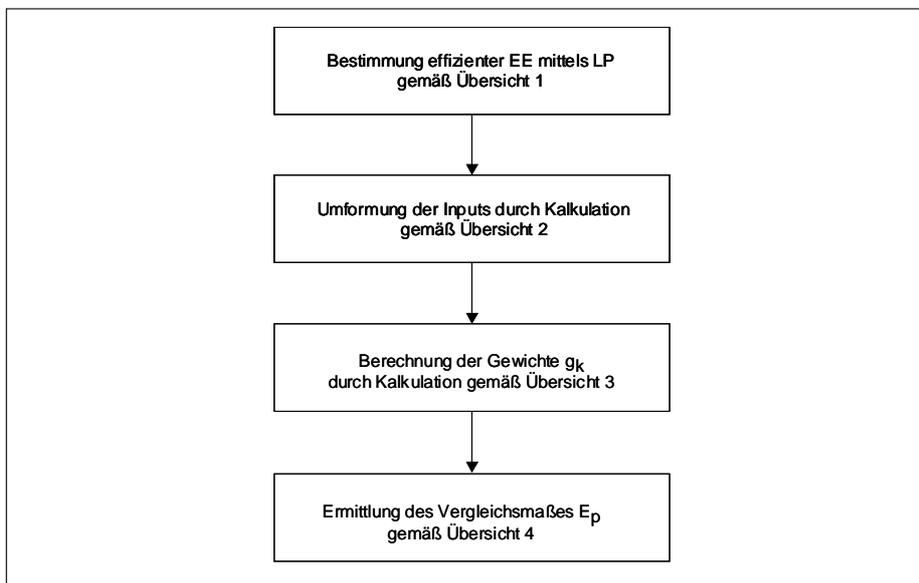


Abb. 1: Ablaufplan zur Bestimmung eines Vergleichsmaßes für effiziente EE

4. Begründung

Die in der Übersicht 4 ermittelte Vergleichskennziffer für effiziente EE wird bestimmt durch die in Übersicht 3 ermittelten Gewichtungsfaktoren. Eine Begründung für solche Gewichtungsfaktoren der Inputs und Outputs könnte ausgehen von plausiblen Anforderungen an ein solches Gewichtungssystem. Eine Anforderung an solche Gewichte könnte sein, dass für effiziente EE die Summe der gewichteten Outputs größer ist als die Summe der gewichteten Inputs. Betrachtet man nämlich die Gewichte als Preise, so wären bei effizienten EE's anzunehmen, dass sie einen Überschuss erwirtschaften, also die gewichteten Inputs einen kleineren „Geldbetrag“ repräsentieren als die gewichteten Outputs.

Um durch die Gewichtung nicht einzelne EE unangemessen zu bevorzugen, kann zusätzlich gefordert werden, dass die Gewichte den Überschuss bei allen EE unter Berücksichtigung der Positivitätsbedingungen möglichst gering schätzen (1), (2). Aus diesen beiden Anforderungen ergibt sich ein System von linearen Optimierungsproblemen bezüglich der Gewichte, welches in der Übersicht 5 dargestellt ist.

Übersicht 5: Anforderungen an ein „vernünftiges“ Gewichtssystem zum Vergleich effizienter EE

Gegeben sei eine Menge $(1, \dots, p, \dots, P)$ effizienter EE gemäß Übersicht 2 mit Input-Output-Vektoren $(x_p, y_p)_{p=1}^P$. Gemäß den zuvor dargestellten Überlegungen kann dann für ein Gewichtssystem $(gx_i)_{i=1}^I, (gy_j)_{j=1}^J$ zum Vergleich effizienter EE gefordert werden:

$$a) \quad \bigwedge_{p=1}^P \sum_{j=1}^J gy_j \cdot y_j^p - \sum_{i=1}^I gx_i \cdot x_i^p = \min$$

$$b) \quad \bigwedge_{p=1}^P \sum_{j=1}^J gy_j \cdot y_j^p - \sum_{i=1}^I gx_i \cdot x_i^p \geq 0$$

$$c) \quad \bigwedge_{j=1}^J gy_j \geq 0 ; \bigwedge_{i=1}^I gx_i \geq 0 ; \sum_{i=1}^I gx_i > 0$$

Die letzte Bedingung ist sinnvoll, denn falls alle Inputgewichte 0 sind, werden eventuelle Unterschiede zwischen den EE's allein durch die Outputs bestimmt, was dem Gedanken der Effizienzmessung als Messung des Verhältnisses von Inputs und Outputs widerspricht.

Im Sinne der zuvor in Bezug auf den Algorithmus übermittelten Überlegungen (Benutzung von Erkenntnissen des MCDM) ist es sinnvoll, auch das zur Ableitung der Gewichtsermittlung zugrunde liegende Ungleichungssystem so umzuformulieren, dass die strukturellen Unterschiede zwischen Inputs und Outputs nicht bestehen bleiben. Dies geschieht im Satz 1.

Satz 1: Umformung des Anforderungssystems der Übersicht 5

Das System a – c der Übersicht 5 kann unter den dort dargestellten Bedingungen überführt werden in ein System der Form

$$a) \bigwedge_{p=1}^P \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \bar{w}_k^p = \min$$

$$b) \bigwedge_{p=1}^P \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \bar{w}_k^p \geq \bar{G}$$

$$c) \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \bar{g}_k > 0, \bar{G} > 0$$

Beweis: Definiere

$$d) \bigwedge_{i=1}^I x_i \max := \text{MAX} \left(x_i^p \right)_{p=1}^P$$

$$e) \bigwedge_{p=1}^P \bigwedge_{k=1}^I \bar{w}_k^p := x_k \max - x_k^p$$

$$f) \bigwedge_{p=1}^P \bigwedge_{k=I+1}^{K=I+j} \bar{w}_k^p := y_k^p$$

$$g) \bigwedge_{k=1}^I \bar{g}_k := \frac{g x_k}{\sum_{k=1}^I g x_k \cdot x_k \max}$$

$$h) \bigwedge_{k=I+1}^K \bar{g}_k := \frac{g y_{k-I}}{\sum_{k=1}^I g x_k \cdot x_k \max}$$

Beachtet man die Ungleichung b) der Übersicht 5, so ergibt sich:

$$i) \bigwedge_{p=1}^P \sum_{j=1}^J g y_j \cdot y_j^p - \sum_{i=1}^I g x_i \cdot x_i^p \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} + \sum_{i=1}^I g x_i \cdot x_i \max \end{array} \right]$$

$$j) \bigwedge_{p=1}^P \sum_{j=1}^J g y_j \cdot y_j^p + \sum_{i=1}^I g x_i \cdot (x_i \max - x_i^p) \geq \sum_{i=1}^I g x_i \cdot \max \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} : \sum_{i=1}^I g x_i \cdot x_i \max \end{array} \right]$$

$$k) \bigwedge_{p=1}^P \sum_{j=1}^J \frac{g y_j}{\sum_{i=1}^I g x_i \cdot x_i \max} \cdot y_j^p + \sum_{i=1}^I \frac{g x_i}{\sum_{i=1}^I g x_i \cdot x_i \max} \cdot (x_i \max - x_i^p) \geq 1$$

\Leftrightarrow
[einsetzen von e - h]

$$e) \bigwedge_{p=1}^P \sum_{j=1}^J \bar{g}_j \cdot w_j^p + \sum_{i=1}^I \bar{g}_i \cdot w_i^p \geq 1 \quad [\text{for } j \rightarrow k]$$

$$f) \bigwedge_{p=1}^P \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot w_k^p \geq \bar{G}$$

Die Umformung für a ist identisch, wegen Übersicht 5 c erfüllen die \bar{g}_k auch c von Satz 1, mit $\bar{G} := 1$ ist der Satz bewiesen.

Unterstellt man nun vereinfacht ein Anforderungssystem der Form a, b, c mit speziellen Eigenschaften, so kann gezeigt werden, dass in diesem Fall ein Gewichtssystem, das zum einen umgekehrt proportional zu den jeweils größten Ausprägungen der Inputs und Outputs gewählt worden ist, also normierend wirkt, gleichzeitig als einziges die plausiblen Anforderungen der Übersicht 5 erfüllt, also als Schattenpreissystem dieses Optimierungssystems angesehen werden kann. Dies stellt der Satz 2 dar.

Satz 2: Äquivalenz von Normierungsgewichten und Schattenpreisen

Gegeben seien effiziente EE $(1, \dots, p, \dots, P)$. Die zu Grunde liegende Technik sei konvex. Die Punkte

$$(\bar{w}_k \max | (\bar{w}_1 \min, \dots, \bar{w}_k \max, \dots, \bar{w}_k \min))_{k=1}^K$$

mögen auf dem Rand der Technik liegen. Weiter gelte:

$$a) \bigwedge_{k=1}^K \bar{w}_k \min = 0$$

Dann erfüllen die Gewichte $(\bar{g}_k)_{k=1}^K$ mit:

$$b) \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k := \frac{\bar{G}}{\bar{w}_k \max}, \quad \bar{G} > 0$$

die Anforderungen a – c des Satzes 1.

Beweis:

Im Rahmen einer Fallunterscheidung werden 3 mögliche Gewichtssysteme betrachtet:

$$c) \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k := \frac{\bar{G}}{\bar{w}_k \max}$$

$$d) \bigvee_{k \in 1}^K \bar{g}_k = \frac{\bar{G}}{\bar{w}_k \max}$$

$$e) \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k > \frac{\bar{G}}{\bar{w}_k \max}$$

Betrachte die Hyperebene \tilde{W} mit:

$$\tilde{W} := \left(\tilde{w}_k \mid \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \tilde{w}_k = \bar{G} \right)$$

die durch die Gewichte gemäß c) definiert ist.

Die Punkte $(\bar{w}_k \max)_{k=1}^K$ liegen nicht nur auf dem Rand der Technik, sondern auch in dieser Hyperebene, denn:

$$f) \quad \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \bar{w}_k \max = \frac{\bar{G}}{\bar{w}_k \max} \cdot \bar{w}_k \max = \bar{G}$$

Diese Hyperebene teilt den Raum \mathbb{R}^K in zwei Teilräume R1 und R2 wobei gilt:

$$g) \quad \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot w_{R1k} < \bar{G}$$

$$h) \quad \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot w_{R2k} \geq \bar{G}$$

Der Punkt 0 liegt in R1, denn:

i)

Alle Punkte des Randes der Technik müssen dann in R2 liegen, denn einige Punkte (die $\bar{w}_k \max$) liegen in der Hyperebene, damit $\sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot 0 = 0 < \bar{G}$ deren Konvexkombinationen Bestandteil der Technik, die nicht konvex sein könnte, wenn Punkte ihres Randes in R1 lägen. Dies verdeutlicht die Abb. 2, denn jeder Punkt P aus R1 wird dominiert durch einen Punkt \bar{P} der Hyperebene.

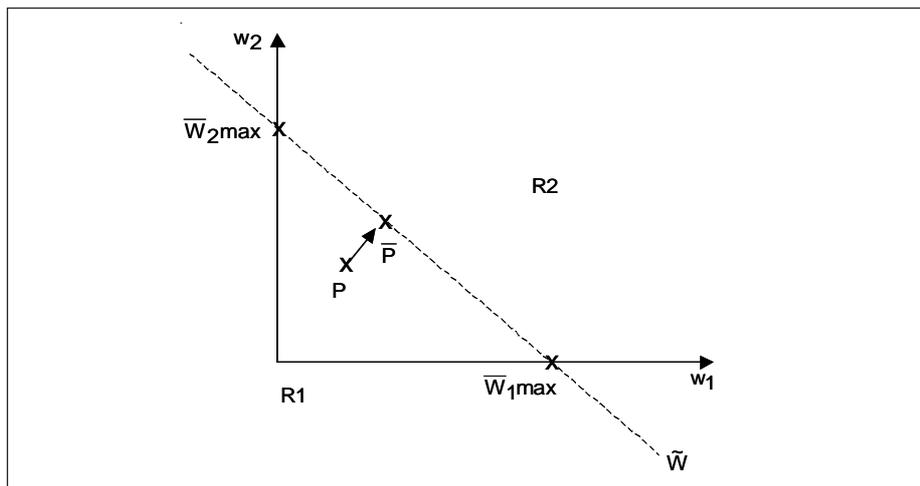


Abb. 2: Rand der konvexen Technik

Damit gilt für alle Punkte \hat{w} des Randes der Technik:

$$j) \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \hat{w} \geq \bar{G}$$

Das Gewichtssystem gemäß c) ist also zulässig im Sinne des Optimierungssystems des Satzes 1.

Betrachtet man nun ein Gewichtssystem der Form d), so gilt:

$$k) \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \bar{w}_k^{\max} < \frac{\bar{G}}{\bar{w}_k^{\max}} \cdot \bar{w}_k^{\max} = \bar{G}$$

Ein solches Gewichtssystem erfüllt also b) des Satzes 1 nicht auf allen Punkten des Randes der Technik, ist also nicht zulässig.

Beachten wir schließlich ein Gewichtssystem der Form e), so gilt für beliebige \hat{w} des Randes:

$$e) \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \hat{w}_k > \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \hat{w} \geq \bar{G}$$

Damit ist ein solches Gewichtssystem nicht optimal, denn auch das Gewichtssystem $(\bar{g}_k)_{k=1}^K$ ist zulässig, erfüllt aber 5a besser, also erfüllt das Gewichtssystem gemäß c) als einziges die Optimierungsbedingungen des Satzes 1, denn c) Satz 1 ist erfüllt, wie man leicht sieht. Es hat die Form von Normierungsgewichten. Interpretiert man \bar{G} als Aggregation der Kosten, so können die \bar{g}_k als Schattenpreise der Outputs bezüglich der Isoproduktionshyperebenen gleicher Kosten \bar{G} interpretiert werden.

Die Ausgangssituation der Übersicht 2 war im Satz 1 zu dem dort definierten System umgeformt worden. Es bleibt zu zeigen, dass dieses System weiter so umgeformt werden kann, dass die Voraussetzungen des Satzes 2 gegeben sind. Dies leistet, soweit wie möglich, der Satz 3.

Satz 3: Gewichtstransformation durch Koordinationsverschiebung

Für die effizienten EE wird das Optimierungssystem des Satzes 1 betrachtet. Dann kann man das Koordinatensystem so verschieben, dass gilt:

$$a) \hat{\bar{w}}_k^{\min} = 0$$

mit

$$b) \hat{\bar{w}}_k^{\min} := \text{MIN} \left(\bar{w}_k^p \right)_{p=1}^P$$

wobei $\left(\bar{w}_k^p \right)_{p=1}^P$ die transformierten Werte der effizienten EE seien.

Liegen die \bar{W}_k^{\max} mit:

$$c) \hat{\bar{w}}_k^{\max} := (\bar{w}_1^{\min}, \dots, \bar{w}_k^{\max}, \dots, \bar{w}_k^{\min}) \text{ auf dem Rand der Technik, dann erfüllt nur}$$

ein Gewichtssystem die Anforderungen der Übersicht 5. Es ist das aus den Normierungsgewichten transformierte System und hat die Form:

$$d) \bigwedge_{k=1}^K g_k := G \cdot (w_k \max - w_k \min) \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k \min}{w_k \max - w_k \min} \right) \right]^{-1}$$

Beweis:

Definiere mit $w_k \min$:

$$e) \bigwedge_{k=1}^K \bar{w}_k := w_k - w_k \min$$

Betrachte das System:

$$f) \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \bar{w}_k = \min$$

$$g) \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \bar{w}_k \geq \bar{G}$$

$$h) \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \bar{g}_k > 0, \bar{G} > 0$$

für beliebige $(\bar{w}_k)_{k=1}^K$ auf dem Rand der Technik. Wegen c, e ist hierauf Satz 2 anwendbar. Das System hat eine eindeutige Lösung, für die gilt:

$$i) \bigwedge_{k=1}^K \bar{g}_k := \frac{\bar{G}}{w_k \max}$$

wählt man nun:

$$j) \bar{G} := \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{w_k \min}{w_k \max - w_k \min} \right)}$$

so gilt wegen g):

$$k) \sum_{k=1}^K \bar{g}_k \cdot \bar{w}_k \geq \bar{G} \quad \vec{[e, i]}$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{\bar{G}}{w_k \max} \cdot (w_k - w_k \min) \geq \bar{G} \quad \vec{[e]}$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{\bar{G}}{w_k \max - w_k \min} \cdot (w_k - w_k \min) \geq \bar{G} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{\bar{G}}{w_k \max - w_k \min} \cdot w_k \geq \bar{G} + \sum_{k=1}^K \frac{\bar{G} \cdot w_k \min}{w_k \max - w_k \min} = \bar{G} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^K \frac{w_k \min}{w_k \max - w_k \min} \right) \vec{[j]}$$

$$\sum_{k=1}^K \left[\frac{G}{1 + \sum_{k=1}^K \frac{w_{k \min}}{w_{k \max} - w_{k \min}}} \cdot \frac{w_{k \max} - w_{k \min}}{w_{k \max} - w_{k \min}} \cdot w_k \right] \geq G \Rightarrow \sum_{k=1}^K g_k \cdot w_k \geq G$$

Teil c des Satzes 1 ist für diese Gewichte erfüllt, mit $G = 1$ haben wir damit gezeigt, dass unter der angegebenen Bedingungen die Gewichte der Übersicht 2 sowohl Normierungsgewichte als auch Schattenpreise sind.

Allerdings gilt nicht allgemein, dass die Punkte $w_{k \max}$ auf dem Rand der Technik liegen. Für theoretische Produktionsfunktionen mag dies zutreffen, wenn vollständige Substituierbarkeit herrscht und alle Ressourcen auf die Funktion nur jeweils eines Produktes verwendet werden. Für empirische Produktionsfunktionen, die aus tatsächlich realisierten Produktionen geschätzt wird, trifft dies in der Regel nicht zu, weil die Punkte $w_{k \max}$ dort durch die empirischen Punkte dominiert werden, aus denen der jeweilige maximale Wert abgeleitet wurde, weil dieser in der Regel nicht in allen anderen Dimensionen die jeweiligen Minimalwerte sondern entsprechend größere annimmt (siehe auch die Beispiele des Kapitels 5).

5. Beispielsanwendungen

Die Nutzungsmöglichkeiten des Kennziffersystems sollen an zwei Beispielen dargestellt werden. Zum einen werden die Daten aus (17) verwendet. Es handelt sich um den Vergleich der Eindampfungsabteilung von 8 Molkereien mit den Daten des Jahres 1998. Deren Input wird durch die im Jahr 1998 benötigte Arbeitsmenge x_1 in Stunden, die benötigte Strommenge x_2 in 1000 kW/h, den Wasserverbrauch x_3 in m^3 und den Dampfverbrauch x_4 in t dargestellt. Output ist die Menge des eingedampften Wassers y_1 in t. Bei nur 8 Abteilungen und 5 Input- und Outputfaktoren ist das Dimensionsproblem offensichtlich.

Bis auf die Abteilung 3 wurde unter der Annahme konvexer Technologie demzufolge auch für alle Anlagen Effizienz festgestellt, so dass hieraus ein Lernprozess nur für die Abteilung 3 gegeben wäre. Für die 7 effizienten Abteilungen soll die hier dargestellte Kennziffer ermittelt werden, um durch sie weitere lernrelevante Unterschiede nachzuweisen. Die Daten der 7 Abteilungen sind in der Übersicht 6 dargestellt.

Übersicht 6: Input- und Outputwerte der Eindampfungsabteilungen

i, j=	x_1 Personal in h	x_2 Strom in 1000 kw/h	x_3 Wasser in cbm	x_4 Dampf in t	y_1 Eingedampftes Wasser in t
1	756	1.353	6.3504	3.092	75.600
2	3.270	439	94.560	11	65.400
3	294	480	24.696	354	29.400
4	9.240	2.396	63.140	7.595	154.000
5	7.680	2.794	153.600	5.618	192.000
6	3.080	3.388	155.540	4.614	154.000
7	1.464	440	29.280	6.330	48.800

Das zweite Beispiel wurde (23) entnommen. Hier wurden die wirtschaftlichen Ergebnisse von 31 Molkereiunternehmen für das Jahr 2000 betrachtet. Als Input werden die verwendeten Rohstoffmengen (Milch) in t (x_1), die eingesetzte Arbeitsmenge als Anzahl Beschäftigter (x_2) und das eingesetzte Kapital in Euro (x_3) verwendet. Output ist der erzielte Umsatz in Euro (y_1). Von den 31 Unternehmen erwiesen sich 13 bei Unterstellung konvexer Technologie im Rahmen der DEA als effizient. Die Daten dieser effizienten Unternehmen sind in Übersicht 7 dargestellt.

Übersicht 7: Input- und Outputwerte der Molkereien

$i, j =$ $p =$	x_1 Rohstoff in kg	x_2 Arbeit in Anzahl	x_3 Kapital in Euro Beschäftigter	y_1 Umsatz in Euro
1	1.024.000	778	62.254.229	480.614.368
2	93.000	22	15.684.095	34.256.556
3	1.600.000	2.150	181.528.558	1.329.358.891
4	80.000	150	11.861.572	51.129.188
5	94.800	31	7.559.006	32.109.130
6	512.000	256	101.329.239	274.052.448
7	318.700	234	53.949.441	219.906.638
8	2.457.000	2.058	224.873.962	1.693.910.002
9	340.000	875	131.500.000	357.904.317
10	120.000	180	33.515.411	102.258.376
11	3.642.000	3.719	597.157.032	2.112.146.761
12	16.8000	73	10.291.600	70.046.988
13	18.1700	269	24.258.950	153.694.339

Für diese effizienten Unternehmen sollen mit Hilfe des Kennzahlensystem geprüft werden, ob sich zwischen Ihnen lernrelevante Unterschiede nachweisen lassen. Es sei darauf hingewiesen, dass für beide Datensätze die jeweiligen Reihenfolgen der Abteilung bzw. Unternehmen beibehalten wurden, diese jedoch neu fortlaufend durchnummeriert sind.

6. Ergebnisse

Die Ermittlung der Effizienz ergab erwartungsgemäß keine Änderungen gegenüber den in den zitierten Arbeiten dargestellten Berechnungen. Die Gewichte für die einzelnen Input- und Outputfaktoren und daraus abgeleiteten Kennziffern für die Abteilungen bzw. Unternehmen wurden gemäß der zuvor dargestellten Methodik ermittelt. Sie sind in den folgenden Übersichten dargestellt.

Expertenbefragungen haben ergeben, dass die für die Abteilung bzw. Unternehmen ausgewiesenen relativen Vorteilhaftigkeiten in diesen Beispielen als plausibel erscheinen.

Übersicht 8: Ergebnisse für die Eindampfungsabteilungen

Gewichte:	Bewertung	Rang
$g_1 = 5,208 \cdot 10^{-6}$	$E_1 = 0,3267$	3
$g_2 = 9,467 \cdot 10^{-5}$	$E_2 = 0,3309$	2
$g_3 = 2,872 \cdot 10^{-4}$	$E_3 = 0,4195$	1
$g_4 = 6,472 \cdot 10^{-6}$	$E_4 = 0,2845$	6
$g_5 = 1,117 \cdot 10^{-4}$	$E_5 = 0,3174$	4
	$E_6 = 0,2879$	5
	$E_7 = 0,2189$	7

Übersicht 9: Ergebnisse für die Molkereiunternehmen

Gewichte:	Bewertung	Rang
$g_1 = 5,208 \cdot 10^{-6}$	$E_1 = 0,3267$	3
$g_1 = 4,734 \cdot 10^{-10}$	$E_1 = 0,3829$	6
$g_2 = 2,765 \cdot 10^{-10}$	$E_2 = 0,2808$	13
$g_3 = 2,660 \cdot 10^{-4}$	$E_3 = 0,4774$	2
$g_4 = 1,670 \cdot 10^{-9}$	$E_4 = 0,3228$	12
	$E_5 = 0,2928$	10
	$E_6 = 0,3424$	8
	$E_7 = 0,4328$	3
	$E_8 = 0,5003$	1
	$E_9 = 0,3099$	11
	$E_{10} = 0,3531$	7
	$E_{11} = 0,3399$	9
	$E_{12} = 0,3992$	5
	$E_{13} = 0,4290$	4

7. Weiterer Forschungsbedarf

Die erzielten Ergebnisse lassen Raum für weitere Untersuchungen. Das hier dargestellte Kennziffersystem wurde nur als Preissystem identifiziert, wenn die Extrempunkte gemäß Satz 2 insgesamt auf dem Rand der betrachteten konvexen Technik liegen. Wie schon erwähnt, ist dies für empirisch ermittelte Frontiers in der Regel nicht der Fall, weil wegen der nicht oder nicht vollständig gegebenen Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren die Extrempunkte nicht beobachtet werden. Es wäre zu untersuchen, welche Auswirkungen sich hieraus auf den Nutzen und die Begründbarkeit des hier dargestellten Kennziffersystems ergeben.

Darüber hinaus stellen die Anforderungen des Satzes 1 an ein Schattenpreissystem nur eine Möglichkeit dar. Es gilt, zu untersuchen, welche anderen Anforderungen sinnvoll an ein solches Schattenpreissystem gestellt werden können und welche Folgerungen sich hieraus auf die Ableitbarkeit eines entsprechenden Kennziffersystems ergeben.

Schließlich wäre es sinnvoll, zu untersuchen, welche Ergebnisse des Unternehmens- bzw. Abteilungsrankings auf Basis dieses Kennziffersystems sich im Vergleich zu anderen Handwerkszeugen, z.B. der Erfolgsfaktorenanalyse, ergeben.

8. Literatur

- (1) Ballestero, E.: Measuring Efficiency by a Single Price System. *European Journal of Operational Research* **115** 616-623 (1999)
- (2) Ballestero, E.; Romero, C.: Weighting in Compromise Programming: A Theorem on Shadow Prices. *Operations Research Letters* **13** 325-329 (1993)
- (3) Banker, R.D.; Chancong, V.: Maximum Likelihood, Consistency and Envelopment Analysis: A Statistical Foundation. *Management Science*. North Holland Verlag New York. **39** (10) 1265-1273 (1993)
- (4) Haimes, Y.; Charnes, A.: *Multiobjective Decision Making* (1983)
- (5) Cooper, W. W.: Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research* **2** 429-444 (1979)
- (6) Coelli, T.; Rao, D. S.P.; Battese, G. E.: *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. Kluwer Verlag Boston ..., (1998)
- (7) Dash Associates: *XPRESS-MP Reference Manual*. Blisworth UK (1999)
- (8) Dyson, R. G.; Allen, R.; Camanho, A. S.; Podinovski, V. V.; Sarrico, C. S.; Shale, E. A.: Pitfalls and Protocols in DEA. *European Journal of Operational Research* **132** 245-259 (2001)
- (9) Fiala, P.: Multicriteria Methods of Performance Analysis. *Central European Journal of Operations Research and Economics* **3-4** 175-182 (1998)
- (10) Fukuyama, H.: Returns to Scale and Scale Elasticity in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operations Research* **125** 93-112 (2001)
- (11) Joro, T.; Korhonen, P.; Wallenius, J.: Structural Comparison of Data Envelopment Analysis and Multiple Objective Programming. *Management Science* **44** (7) 962-979 (1998)
- (12) Kleine, A.: Data Envelopment Analysis aus entscheidungstheoretischer Sicht. *OR Spektrum* **23** (2) 223-242 (2001)
- (13) Kleine, A.: *DEA-Effizienz. Entscheidungs- und produktionstheoretische Grundlagen der Data Envelopment Analysis*. Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden, (2002)
- (14) Li, X-B; Reeves, G.; Mehrabian, S.; Alirezaee, M. R.: A Multiple Criteria Approach to DEA. *European Journal of Operations Research* **115** 507-517 (1999)
- (15) Mehrabian, S.; Alirezaei, M. R.; Jananshaloo, G. R.: A Complete Efficiency Ranking of Decision Making Units in Data Envelopment Analysis. *Computational Optimization and Applications* **14** 261-266 (1999)
- (16) Müller, B.: Methodik des Einsatzes mathematischer Modelle bei der Strukturplanung für Molkereien. *Kieler Milchwirtschaftliche Forschungsberichte* **36** (4) 199-240 (1984)
- (17) Müller, B.: Effizienzmessung in der Molkereiwirtschaft mittels Data Envelopment Analysis. *Kieler Milchwirtschaftliche Forschungsberichte* **52** (4) 355-378 (2000)
- (18) Post, T.; Spronk, J.: Performance Benchmarking Using Interactive DEA. *European Journal of Operations Research* **115** 472-487 (1999)
- (19) Seiford, L. M.; Zhu, J.: DEA: The Evolution of the State of the Art (1978-1995). *The Journal of Productivity Analysis* **7** 99-137 (1996)
- (20) Seiford, L. M.; Zhu, J.: Stability Regions for Maintaining Efficiency in DEA. *European Journal of Operations Research* **108** 127-139 (1997)
- (21) Sueyoshi, T.: DEA-Discriminant Analysis in the View of Goal Programming. *European Journal of Operational Research* **115** 564-582 (1999)
- (22) Takeda, E.; Satch, J.: A Data Envelopment Analysis Approach to Multicriteria Decision Making with Incomplete Information. *Computers and Mathematics with Applications* **39** 81-90 (2000)

- (23) Thiele, H.; Winkelmann, T.: Benchmarking von Unternehmen der Ernährungswirtschaft mittels Effizienzanalyse. In: Schriften der GEWISOLA, Bd. 38, 2003 (erscheint demnächst).
- (24) Wei, Q.; Zhang, J.; Zhang, X.: An Inverse DEA Model for Inputs/Outputs Estimate. European Journal of Operational Research **121** 151-163 (2000)
- (25) Yu, P. L.: Multiple-Criteria Decision Making. Plenum Press New York, (1985)
- (26) Zeleny, M.: Multiple Criteria Decision Making. McGraw Hill New York, (1982)

9. Zusammenfassung

Müller, B.: **Ranking technisch effizienter Prozesse im Rahmen der Data Envelopment Analysis (DEA) an Fallbeispielen der Molkereiwirtschaft.** Kieler Milchwirtschaftliche Forschungsberichte **55** (2) 89-105 (2003)

29 Molkereiwirtschaftliche Ökonomie (Data Envelopment Analysis)

Verwendet man die DEA zur Effizienzanalyse für Molkereiunternehmen oder Abteilungen zum Zwecke des Benchmarking bzw. Best-Practices, so ergeben sich für die als effizient dargestellten Entscheidungseinheiten keine Hinweise für weitere mögliche Lernfortschritte. In dieser Arbeit wird ein Kennziffersystem dargestellt, mit dessen Hilfe es möglich ist, Unterschiede zwischen den mittels der DEA als effizient nachgewiesenen Entscheidungseinheiten zu ermitteln. Dieses Kennziffersystem entspricht einerseits einer gewichtenden Normierung, wie sie aus dem Multi-Criteria Decision Making bekannt ist. Andererseits lassen sich die den Kennziffern zugrunde liegenden Gewichte unter geeigneten Bedingungen als Schattenpreise der Input- und Outputfaktoren bezüglich eines geeigneten Entscheidungssystems nachweisen. An zwei Beispielen, einem Vergleich von Eindampfungsabteilungen einzelner Molkereien und einem Vergleich der Wirtschaftlichkeit ganzer Molkereiunternehmen, wird das Potential der Methodik dargestellt.

9. Summary

Müller, B.: **Ranking of technically efficient processes in the frame of the Data Envelopment Analysis (DEA) at exemplary cases of the dairy sector.** Kieler Milchwirtschaftliche Forschungsberichte **55** (2) 89-105 (2003)

29 Dairy Economics (Data Envelopment Analysis)

At applying the DEA for efficiency analysis of dairy companies or departments for benchmarking or best practice reasons no indications for further possible progress in learning are detectable for the efficiently represented decision units. This study presents a parameter system that allows to detect differences among the decision units proofed by DEA to be efficient. On one hand, this parameter system corresponds to a weighting scale/standardization as known from the Multi-Criteria Decision Making. On the other hand, the weighting figures on which the parameters are based can be identified under appropriate conditions as shadow prices of the input and output factors as regards an appropriate decision system. The potential of the methodics is displayed at two examples, encompassing a comparison of evaporation departments of individual dairies, and a comparison of the profitability of complete dairies.

9. Résumé

Müller, B.: **Ranking de procédés techniquement efficaces dans le cadre de Data Envelopment Analysis (DEA) à l'exemple de deux cas dans le secteur laitier.** Kieler Milchwirtschaftliche Forschungsberichte **55** (2) 89-105 (2003)

29 Economie laitière (Data Envelopment Analysis)

En appliquant DEA pour une analyse d'efficacité des laiteries ou des départements laitiers à des fins d'analyse comparative (benchmarking) ou de meilleure pratique (best practice), on n'obtient pas d'indications sur de futurs progrès didactiques pour les unités de décision reconnues comme efficaces. Cette étude présente un système de paramètres qui permet de détecter des différences entre les unités de décision identifiées par DEA d'être efficaces. Ce système de paramètres correspond d'un côté à une échelle/standardisation pondérée connue du Multi-Criteria Decision Making. De l'autre côté, les facteurs de pondération étant à la base des paramètres peuvent être identifiés sous des conditions propices comme des „shadow price“ des facteurs input et output par rapport à un système de décision adéquat. Le potentiel de cette méthodique est illustré à l'aide de deux exemples, à savoir une comparaison de départements d'évaporation de laiteries individuelles et une comparaison de la rentabilité de laiteries entières.